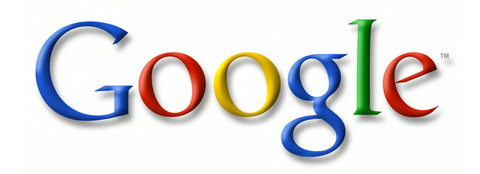




1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE


QA
155
.L69
v.1



1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



Math.

2 vols.

$1.25

ÉLÉMENS

RAISONNÉS D'ALGÈBRE.

ÉLEMENS

RAISONNÉS D'ALGÈBRE,

Publiés à l'usage des Étudians en Philosophie ;

Par Simon LHUILIER,

Professeur de Mathématiques à Genève, Membre de la Société pour l'Encouragement des Arts ; l'un des Membres du Jury d'Instruction du Léman ; Professeur honoraire de Mathématiques sublimes à l'Université de Leyde ; Membre de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Prusse, des Sociétés Royales de Londres et de Goëttingue ; Correspondant de l'Académie de Saint-Pétersbourg ; Membre de l'Athénée de Lyon, du Lycée du Département du Gard ; et de la Société d'Education en Pologne.

TOME PREMIER.

A GENÈVE,
Chez J. J. Paschoud, Libraire.

An XII. — 1804.

ERRATA DU PREMIER VOLUME.

Page 6, ligne 13, $8x$, *lisez*, $3x$.
ibid, ligne 22, equel, *lisez*, lequel.
13, ligne 14, 120, *lisez*, 20.
49, ligne 2 et 3 5, coefficien $\frac{s}{t}$, *lisez*, coefficien $\frac{t}{s}$.
52, ligne 27, B, *lisez*, A.
54, ligne 12, des de, *lisez*, des $\frac{9}{16}$ de.
55, ligne 17, $'x$, *lisez*, $\frac{1}{4}x$.
ibid. ligne 21, x, *lisez*, $\frac{25}{16}x$.
58, ligne 18, 3, *lisez*, 5.
95, ligne 17, $x+b-$, *lisez*, $x-b=$
113, ligue 9, $mnxx=$, *lisez*, $mnxx+$
123, ligne 7, $ab'p$, *lisez*, $ab'p'$.
179, ligne 23, *pqe*, *lisez*, *pqn*.
287, ligne 19, 93, *lisez*, 95.

On trouve, chez J. J. ***PASCHOUD***, *la Polygonométrie, et l'abrégé d'Isopérimétrie, du même Auteur.* Prix 4 liv. 10.

AVANT-PROPOS.

Au moment où j'écris ces lignes, que j'arrose de mes regrets et de mes larmes, les Lettres viennent de perdre (1) le véritable Auteur de l'Ouvrage que je publie, G. L. Le Sage, mon parent et mon guide dans mes premières études. Il est le fruit des leçons et des directions que j'ai eu le bonheur de recevoir de cet habile Mathématicien, qui, à la profondeur et à l'étendue des connoissances, joignoit l'esprit le plus philosophique; qui a consacré sa longue vie à la recherche de la vérité et à sonder les mystères de la Nature; qui a mérité la reconnoissance de ses compatriotes, par les services littéraires qu'il a rendus à un grand nombre d'entr'eux; qui, par ses instructions, par ses directions et par ses conseils, a contribué à entretenir et à répandre dans notre Patrie le goût des connoissances

(1) Le 20 Octobre 1803, postérieurement à l'impression des notes jointes aux pages 10 et 74.

utiles, et la culture de la saine Philosophie.

Conduit par le sentiment que la partie logique des Mathématiques est d'une utilité générale; que, parmi les Elèves qui se présentent pour être initiés à l'étude des Sciences exactes, il n'en est qu'un petit nombre qui soient appelés à les approfondir; et que ceux d'entr'eux qui, par goût ou par état, sont appelés à en faire un objet particulier de leurs études, auront acquis une grande facilité pour y faire des progrès rapides, lorsqu'ils y auront été préparés par les développemens solides et lumineux des premiers principes; ce Maître habile dirigeoit ses instructions, bien moins vers l'étendue et la profondeur des connoissances, que vers leur utilité logique, vers les moyens de former ses Elèves au raisonnement, et de les initier par des exercices nombreux et variés à l'étude des Sciences philosophiques. Ceux de nos compatriotes, qui ont eu le bonheur d'être les objets de ses soins, reconnoîtront sa marche raisonnée

surtout dans le début de cet Ouvrage; et ils se joindront à moi pour regretter que la variété de ses occupations, et le nombre de ses vues sur toutes les branches de la Philosophie, ne lui aient pas laissé le loisir de rédiger en particulier celles de ses compositions qui sont relatives aux études élémentaires.

Cet Ouvrage est à peu près conforme à la partie algébrique du Cours élémentaire de Mathématiques à l'usage des écoles Palatinales de Pologne, qui a servi de base à l'étude de ces Sciences, aussi long-tems qu'ont subsisté la Commission et la Société, chargées de diriger et d'inspecter dans cet Etat les Etablissemens d'Instruction publique. Il est aussi à peu près conforme à l'édition allemande qui en a été faite à Tubingue, chez Cotta, Libraire.

Après le grand nombre d'Ouvrages élémentaires qui ont été publiés, même par les Mathématiciens les plus habiles, il peut paroître inutile ou téméraire d'en

augmenter le nombre. Aussi n'aurois-je pas publié cette partie des leçons que je suis appelé à donner aux Etudians en Philosophie, si mes Collègues, les Professeurs de notre Académie, vigilans à procurer tout ce qui peut faire fleurir dans notre Patrie les études dont la surveillance leur est confiée, ne m'eussent sollicité, par des demandes réitérées, à faciliter aux Elèves l'étude des Sciences que je suis appelé à leur enseigner, en en mettant le texte entre leurs mains. Je n'ai pu me refuser à leur invitation. Puisse mon travail remplir mon but et celui de mes Collègues; puisse-t-il faciliter l'étude de la Science, contribuer à la prospérité de nos Etablissemens d'Instruction, et à la conservation de la réputation littéraire dont jouit notre Patrie. Que les Elèves auxquels il est destiné, concourant à ce but, apportent à l'étude les dispositions qui en assurent le succès, et nous fassent jouir de la récompense la plus satisfaisante de nos travaux, du sentiment de notre utilité.

ÉLÉMENS

RAISONNÉS D'ALGÈBRE.

CHAPITRE PREMIER.

Problèmes particuliers du premier degré à une inconnue.

§ I^{er}. En arithmétique, on opère seulement sur les signes des quantités connues, pour obtenir les quantités inconnues, qui sont déterminées dans les premières. En algèbre, on opère indifféremment sur les signes des quantités connues, et sur les signes des quantités inconnues : le calculateur poursuit ses opérations sur les uns et sur les autres, jusqu'à ce qu'il obtienne l'expression de ces dernières dans les premières, de la manière la plus simple. Telle est la première différence qui distingue l'une de l'autre ces deux branches de la science du calcul : c'est la seule que nous introduirons pendant quelque tems.

Les réflexions qui doivent avoir été déve-

loppées dans l'arithmétique, sur l'arbitraire presque absolu qui a lieu dans le choix des signes de nos idées, et en particulier dans le choix des signes destinés à représenter les grandeurs, doivent diminuer beaucoup, si elles ne lèvent pas complétement les difficultés auxquelles cette différence peut paroître, au premier coup-d'œil, devoir donner lieu.

Un des grands avantages de la substitution des signes abrégés, par lesquels les multitudes ont été désignées dans l'arithmétique aux expressions de ces multitudes tirées du langage ordinaire, est tiré de leur simplicité. De là découlent, d'une part, la promptitude avec laquelle leur intuïtion rappelle à l'entendement l'idée des grandeurs qu'ils représentent ; et, de l'autre, la facilité avec laquelle on les combine les uns avec les autres, et on exécute sur eux les opérations qui entrent dans cette science. L'introduction des signes destinés à représenter les quantités inconnues, est fondée sur les mêmes motifs. Si notre entendement étoit moins imparfait qu'il ne l'est, nous aurions moins besoin de recourir à un pareil secours : des êtres d'une intelligence moins bornée que la nôtre, verroient, plus aisément et plus promptement que nous, la

liaison qui règne entre les connoissances données sur une question, et la réponse demandée, et ils auroient moins besoin de passer par les milieux dont la foiblesse de notre entendement actuel rend l'emploi nécessaire.

Pour faire mieux sentir que l'introduction des caractères destinés à représenter les quantités inconnues, est souvent une affaire de commodité, autant, au moins, que de nécessité, nous ferons, pendant quelque tems, la comparaison de deux marches un peu différentes. Suivant l'une d'elles, nous n'opérerons, comme dans l'arithmétique, que sur les quantités connues, sans que nous paroissions faire quelqu'usage d'expressions des quantités inconnues. Cette marche peut être appelée *marche du raisonnement*, vu qu'elle l'exige dans toutes ses parties; ou *marche arithmétique*. Suivant l'autre, qui est la *marche algébrique*, nous introduirons des signes pour désigner les quantités inconnues; et par des règles générales, qui seront développées à leur place, nous parviendrons, d'une manière sûre, à la solution des questions proposées.

Ce double procédé est d'autant plus utile, qu'il présente des exercices nombreux de logique pratique; avantage qui me paroît

être d'une grande importance pour le plus grand nombre des jeunes gens qui entreprennent l'étude des mathématiques.

Nous ne devons cependant pas nous flatter de pouvoir suivre long-tems ce parallèle. Il est un très grand nombre de questions trop compliquées, pour que nous puissions parvenir à leur dénoûment par le raisonnement pur, sans profiter des instrumens et des méthodes que l'algèbre nous fournit. Il est donc important d'apprendre, en traitant des questions simples, à faire usage de ces instrumens, et à suivre ces méthodes, afin que l'habitude de les employer, diminue d'autant plus la difficulté de leurs applications aux questions difficiles et épineuses. En particulier, les sciences physico-mathématiques présentent un très grand nombre de cas, dans lesquels l'emploi de ces instrumens et de ces méthodes nous paroît absolument nécessaire. Lors même que, par une perfection peu commune de notre entendement, nous parviendrions à surmonter, par le seul raisonnement, plusieurs des difficultés que ces sciences présentent; on ne peut disconvenir que cette marche ne soit le plus souvent plus longue et moins générale que la marche algébrique.

Or, dans les sciences appliquées, parvenir au but, et y parvenir le plutôt possible, est presque toujours le plus important.

§ 2.e *Problème.* Le bien de A est triple du bien de B. On sait d'ailleurs que A possède 18 francs de plus que B. On demande leurs biens particuliers.

Arithmétiquement. Puisque le bien de A est triple du bien de B, le bien de A surpasse le bien de B de deux fois le bien de B. Mais on sait d'ailleurs que le bien de A surpasse le bien de B de 18 francs : donc, deux fois le bien de B vaut 18 francs, et une seule fois le bien de B vaut 9 francs. Le bien de A, qui en est triple, vaut 27 francs. Ce dernier bien surpasse en effet le premier de 18 francs.

Algébriquement. Soit désigné le bien de l'une de ces deux personnes, et en particulier le bien de la moins riche, par quelque signe arbitraire, sur lequel, par sa brièveté, il soit facile d'opérer. On est convenu de désigner le plus souvent les quantités inconnues par quelqu'une des dernières lettres de l'alphabet, telles que x, y, z. Soit donc désigné le bien de B par x : le bien de A, en tant qu'il surpasse le bien de B de 18 francs, devra être désigné par x augmenté de 18, ou par x plus 18, que l'on exprime

ainsi $x+18$, le signe $+$ étant celui de l'addition, et se lisant *plus* (1). D'un autre côté, le bien de A, en tant qu'il est triple du bien de B, doit être désigné par x multiplié par 3, ou par 3 fois x; ce que l'on indique ainsi : $3 \times x$ (le signe $\times$ étant le signe de la multiplication, et se lisant *fois*) (2); et plus en abrégé $3x$, en supprimant ou en sous-entendant le signe de la multiplication. Le nombre qui indique combien de fois on prend une quantité, s'appelle *coefficient.*

Le bien de A est donc exprimé de deux manières : d'une part par $8x$, et de l'autre par $x+18$. Ces deux expressions d'une seule et même quantité doivent revenir au même. On doit donc dire $3x$ sont égales à $x+18$; ce qu'on indique ainsi : $3x = x + 18$. Le signe $=$ est le signe de l'égalité, et se lit *est égal à.* L'expression de l'égalité de deux quantités s'appelle une *équation.* Les deux

---

(1) On a indiqué la soustraction par le signe $-$, lequel se prononce *moins* : ainsi $x - 6$ se prononce x moins 6.

(2) On a indiqué la division par le signe : qui se lit *divisé par* ; ainsi $x : 4$, se lit *x divisé par 4.* On désigne aussi la division par une fraction ayant pour numérateur le dividende, et pour dénominateur le diviseur.

quantités égales entr'elles, qui sont situées de part et d'autre du signe de l'égalité, sont appelées les *membres* de l'équation. Lorsque quelque membre est composé de plus d'une partie, chacune d'elles est appelée un *terme* de ce membre.

Lorsque deux quantités sont égales entr'elles, on ne trouble pas l'égalité quand on ajoute à l'une et à l'autre, ou quand on ôte à l'une et à l'autre une même quantité. Or, dans l'équation $3x = x + 18$, il y a des x à chaque membre; ôtant $1x$ à chaque membre, il reste $2x = 18$.

Lorsque deux quantités sont égales entr'elles, leurs moitiés sont aussi égales entr'elles : en divisant par 2 les deux membres de cette dernière équation, on obtient

$x = 9$, bien de B.

$x + 18 = 27$, bien de A.

$3x = 27$, 2.^e^ expression du bien de A.

Autres exercices. Le bien de A est quadruple du bien de B : la différence de leurs biens est 24 francs.

Le bien de B est les $\frac{5}{4}$ du bien de A ; la différence de leurs biens est 16 francs.

Le bien de B est les $\frac{5}{5}$ du bien de A ; la différence de leurs biens est 20 francs.

§ 3. En réfléchissant sur la question précédente, on voit que de même qu'il y a deux quantités cherchées, il y a aussi sur la liaison de ces deux quantités entr'elles, deux connoissances données, indépendantes l'une de l'autre. Chacune d'elles, en particulier, laisse la question indéterminée ou susceptible d'autant de solutions qu'on le veut; mais il n'y a qu'une réponse à la question qui satisfasse à chacune d'elles. La question est donc déterminée par les deux conditions énoncées, et elles constituent *l'état de la question*.

Les noms donnés aux quantités inconnues ou cherchées, sont en partie arbitraires : tel est le signe x employé pour indiquer le bien de B, et ils sont tirés, en partie, de ce signe arbitraire, et des connoissances ou conditions données dans l'état de la question. Pour donner ces noms, on a eu soin de commencer par le bien le plus petit : d'où il est résulté qu'on a exprimé le bien le plus grand dans le plus petit, par addition ou par multiplication; tandis que la petite quantité est exprimée dans la grande, par voie de soustraction ou de division; opérations respectivement plus compliquées que les deux premières. Cette précaution de commencer par donner

des noms aux quantités les plus petites, de manière à procéder par voie d'addition ou de multiplication, abrège souvent les opérations suivantes, en même tems qu'elle simplifie les expressions composées des quantités cherchées.

Cette partie de la recherche sera appelée *dénomination*, vu qu'elle consiste à donner des noms aux quantités inconnues.

Dans la seconde partie, on a indiqué par une équation l'identité de deux expressions d'une même quantité. Cette seconde partie de la recherche sera appelée *condition*, vu qu'elle répond toujours à quelqu'une des conditions ou connoissances qui font partie de l'état de la question, et dont on n'a pas fait usage dans les dénominations.

Dans la troisième partie : on simplifie l'équation, de manière qu'on obtienne la quantité inconnue seule, dégagée de toute opération qui l'embarrasse. La règle générale de cette opération, est de simplifier l'équation par l'opération opposée à celle qui la complique. Ainsi, dans l'équation $3x = x + 18$, les x étant situées des deux côtés du signe de l'égalité, on l'a simplifiée; en ôtant de part et d'autre $1x$, on obtient $2x = 18$. La mul-

tiplication par 2 embarrasse le signe de l'inconnue ; on dégage l'équation en divisant ses deux membres par 2. L'application de cette règle est fondée sur le principe que, si deux quantités sont égales, elles demeurent égales quand on leur fait subir des changemens égaux par l'une des quatre opérations de l'arithmétique. Cette partie de la recherche, est appelée *Réduction*.

La réduction est suivie de la *solution*. Cette quatrième partie renferme la réponse à la question proposée, ou les expressions des quantités ci-devant inconnues en quantités connues.

Dans la cinquième et dernière partie, on examine si les expressions des quantités cherchées, trouvées dans la solution, répondent à l'état de la question, ou si la condition est bien remplie. Cette opération est appelée *Vérification* ou preuve (*a*).

(*a*) Cet ordre est aussi lumineux qu'il est commode. Il distingue des opérations qui sont en effet différentes les unes des autres. Dans les questions compliquées, le passage d'une de ces opérations à la suivante, peut être saisi comme point de repos pour soulager l'attention du calculateur. Si on apprend, par la vérification, qu'il s'est glissé quelqu'erreur dans la suite des opérations, il est facile de la découvrir en repassant sépare-

Je vais éclaircir la division qui vient d'être développée, en l'appliquant à une des questions précédentes.

Le bien de A est quadruple du bien de B; la différence de leurs biens est 24 francs.

Dénom. Bien de B. x

Bien de A. . . . . $4x$ ou $x+24$.

Condit. $4x = x + 24$.

Réduct. $3x =$ 24 (en ôtant x à chaque membre).

$1x =$ 8 (en divisant chaque membre par 3).

Solut. $x =$ 8, bien de B.

$4x = 32$, bien de A, en tant qu'il est quadruple du bien de B.

$x + 24 = 32$, bien de A, en tant qu'il surpasse le bien de B. de 24.

Vérif. $32 = 32$.

---

ment chacune d'elles. J'en suis redevable à M.r LESAGE, mon parent et mon guide privé dans mes études philosophiques. Si j'ai parcouru avec quelque succès la carrière dans laquelle il m'a introduit, je me fais un honneur et un devoir de le rapporter aux soins assidus et paternels avec lesquels ce physicien et mathématicien philosophe a veillé à mon instruction et a dirigé mes études.

§ 4e. *Problème.* Une personne rencontre des pauvres. Si elle leur donne 6 sols à chacun, il lui restera 20 sols, après avoir fait cette aumône : elle voudroit leur donner 8 sols à chacun; mais il lui manque 14 sols pour l'exécuter. On demande le nombre des pauvres, et le bien de cette personne.

Arithmétiquement. Puisque la première fois il lui reste 20 sols, tandis que la seconde fois il lui manque 14 sols, elle auroit donné 34 sols, la seconde fois, de plus que la première. Mais elle donne à chaque pauvre 2 sols, la seconde fois, de plus que la première, et partant elle donne en tout, la seconde fois, de plus que la première, 2 sols, pris autant de fois qu'il y a de pauvres. Donc, 2 sols, pris autant de fois qu'il y a de pauvres, font 34 sols, dont 1 sol, pris autant de fois qu'il y a de pauvres, fait 17 sols. Donc, le nombre des pauvres est 17.

Nombre des pauvres . . . 17.

1re. aumône . . $6 \times 17 = 102$.

Bien de cette personne . . $102 + 20 = 122$.

2me. aumône . . $8 \times 17 = 136$.

Bien de cette personne $136 - 14 = 122$.

Alg. Dén. Nombre des pauvres x

				Bien.
1re. aumône . . .	$x \times 6$	ou	$6x$	$6x+20$.
2me. aumône . . .	$x \times 8$	ou	$8x$	$8x-14$.

Cond. $8x-14=6x+20$.

Réd. $8x = 6x+34$ en ajoutant 14 à chaque membre.

$2x = 34$ en ôtant $6x$ à chaque membre.

$1x = 17$ en divisant chaque membre par 2.

Solut. $x = 17$, nombre des pauvres.

$6x = 102$, première aumône.

$8x = 136$, seconde aumône.

$6x+120=102+20=122$, bien suivant la 1re. aumône.

$8x-14=136-14=122$; bien suivant la 2me. aumône.

Vérif. $122=122$.

Autres exercices. Un voleur s'enfuit en faisant 8 lieues par jour; un archer part 9 jours après, du même lieu, et le poursuit en faisant 11 lieues par jour. On demande quand l'archer atteindra le voleur.

Tout étant posé comme dans l'exercice précédent, on demande dans combien de jours, l'archer ne sera plus éloigné du voleur que de 24 lieues.

Item, en supposant que le voleur élude la poursuite de l'archer, et qu'ils continuent l'un et l'autre leur route, on demande dans combien de jours l'archer sera éloigné de 18 lieues du voleur.

Les deux aiguilles d'une montre étant sur un même point, à midi, par exemple, on demande quand elles seront de nouveau sur un même point.

Une personne veut acheter un certain nombre d'aunes d'étoffe. Si elle achète d'une étoffe qui coûte 20 francs l'aune, il lui manquera 32 francs pour faire cette emplète; mais si elle achète de celle qui coûte seulement 18 francs, il lui manquera seulement 12 francs. On demande le nombre des aunes et le bien de l'acheteur.

§ 5^e. *Problème.* Deux personnes, séparées par un intervalle de 240 lieues, viennent l'une au devant de l'autre : la première fait 8 lieues par jour, et la seconde fait 7 lieues par jour on demande le point où elles se rencontreront.

Arith. Ces deux personnes s'approchent l'une de l'autre par jour, de la somme de 8 lieues et de 7 lieues, c'est-à-dire, de 15 lieues. Le nombre de leurs jours de marche se trouvera en cherchant combien de fois il faut répéter 15 lieues pour en faire 240: c'est-à-dire, en divisant 240 par 15, le quotient 16 est le nombre de jours cherché.

Jours de marche . . . . . . 16.
Chemin de la 1^re. personne, $16 \times 8 = 128$.
Chemin de la 2^de. personne, $16 \times 7 = 112$.
Chemin total . . . . 240.

Algébr. Dén. Jours de marche. . . x.
Chemin de la 1^re. personne. . . $8x$.
Chemin de la 2^de. personne. . . $7x$.

Cond. $8x + 7x = 240$.
Réd. $15x = 240$.
Solut. $1x = 16$.
$8x = 128$.
$7x = 112$.
Vérif. $128 + 112 = 240$.

Autres exercices. Deux personnes séparées par un intervalle de 88 lieues, viennent l'une au devant de l'autre. L'une fait 2 lieues dans 3 heures; l'autre fait 4 lieues dans 5 heures. On demande au bout de combien de tems

elles ne seront plus séparées que par un intervalle de 22 lieues.

Quelqu'un achète un certain nombre d'aunes d'étoffe à 15 francs l'aune, et un pareil nombre d'aunes d'étoffe, à 20 francs l'aune; il paie en tout 420 francs. On demande le nombre des aunes.

§ 6. *Problème.* A et B ont entr'eux deux 120 louis; A possède 16 louis de plus que B: on demande leurs biens particuliers.

Arith. Si les biens de A et de B étoient égaux, ils auroient chacun 60 louis; mais pour chaque louis que A possède de plus que 60, B en possède un de moins que 60, (pour que la somme de leurs biens reste la même); ce qui fait, pour la différence de leurs biens, 2 louis. Donc, la différence de leurs biens, est double de la différence du bien de l'un d'entr'eux à 60; ou la seconde différence est la moitié de la première. Mais la première différence est 16 : donc la seconde différence est 8.

Bien de A . . . $60 + 8 = 68$.

Bien de B . . . $60 - 8 = 52$.

Autrement. Que A prélève les 16 louis qu'il a de plus que B, il restera 104 louis à partager également entre A et B; ce qui fait

pour

pour chacun et en particulier pour B 52, ajoutant à 52 les 16 que A a de plus que lui, la portion de A est 68.

Algéb. Dén. Bien de B . . . x.
Bien de A . . . $x+16$.
Somme . . . $2x+16$.

Cond. $2x+16=120$.
Réd. $2x=104$, en ôtant 16 à chaque membre.
$1x=52$, en divisant chaque membre par 2.
Sol. $x=52$, bien de B.
$x+16=68$, bien de A.
Vér. $52+68=120$.

Aut. exemp. Un père et son fils, ont 80 ans entr'eux deux; le père a 32 ans de plus que son fils. Quels sont leurs âges?

Dans un conseil de 100 personnes, où A et B étoient en concurrence pour un certain emploi, A a reçu 12 suffrages de plus que B. Quel est le nombre des suffrages de chacun?

§ 7°. *Probl.* Les biens de trois personnes A, B, C, sont tels, que
la somme des biens de A et de B, est 120 louis;
la somme des biens de A et de C, est 140 louis;
la somme des biens de B et de C, est 150 louis.
On demande leurs biens particuliers.

Arith. Cette question peut être réduite à une question de la même espèce que celle du § 6me, comme il suit :

Puisque la somme des biens de A et de B est 120,
et que la somme des biens de A et de C est 140,
le bien de C surpasse le bien de B de 20;
mais B et C ont entr'eux deux . . . . 150.

Donc, le bien de B est . . . . 65.
le bien de C est . . . . 85.
De là le bien de A est . . . . 55.

En effet, ... $55+65 = 120$.
$55+85 = 140$.
$65+85 = 150$.

Autrement. Le bien de A fait partie de chacune des deux sommes . . . . . 120 et 140.

Le bien de B fait partie de chacune des deux sommes . . . . . 120 et 150.

Le bien de C fait partie de chacune des deux sommes . . . . . 140 et 150.

Donc, la somme des trois nombres connus 120, 140, 150, qui est 410, est double de la somme des biens de A, de B et de C. Donc, la somme simple des biens de A, de B et de C, vaut la moitié de 410, qui est 205. De ce nombre 205, retranchant séparément 150, 140, et 120, on obtient pour restes

55, 65, 85, qui sont les biens de A, de B, et de C respectivement.

Alg. Dén. Que le bien de A, p. ex., soit x,
le bien de B sera $120 - x$,
le bien de C . . . $140 - x$,
Somme des biens de B et de C . $260 - 2x$.

Cond. $260 - 2x = 150$.
Réd. $260 = 150 + 2x$ en ajoutant $2x$ à chaque membre.
$110 = 2x$ en ôtant 150 à chaque membre.
$55 = x$ en divisant chaque memb. par 2.
Sol. $x = 55$, bien de A.
$120 - x = 65$, bien de B.
$140 - x = 85$, bien de C.
V. $65 + 85 = 150$.

Autrement.

Dén. Somme des trois biens x.
Bien de A . . . . $x - 150$.
Bien de B . . . . $x - 140$.
Bien de C . . . . $x - 120$.
Somme des trois biens . . . . $3x - 410$.

C. $3x - 410 = x$.

R. $3x = x + 410$, en ajoutant 410 à chaque membre.

$2x = 410$, en ôtant x à chaque membre.

$x = 205$ en divisant chaque membre par 2.

Aut. exer. A et B ont entr'eux deux 240 fr.
A et C . . . 280.
B et C . . . 320.

Le bien de A surpasse le bien de B de 24 fr.
Le bien de A surpasse le bien de C de 32 fr.
Et la somme des biens de B est de C et de 60 fr.
On demande leurs biens particuliers.

Remarque sur ce dernier exercice. Puisque le bien de A surpasse le bien de B de 24 fr., tandis que le bien de A surpasse le bien de C de 32 fr., le bien de B est plus grand que le bien de C de 8 fr. Partant, si la troisième condition avoit aussi été relative à la différence des biens de B et de C; ou bien elle auroit dû être conforme à la conséquence tirée des deux premières conditions, et alors elle n'auroit rien appris; on auroit eu deux connoissances seulement pour déterminer trois quantités, et le pro-

blème seroit indéterminé ou susceptible d'un nombre illimité de solutions ; ou bien cette troisième différence n'auroit pas été conforme à la conséquence tirée de la combinaison des deux premières ; il y auroit eu contradiction entre les connoissances données, et le problème eût été impossible.

Il en est de même des deux premiers exercices. La troisième condition ne peut pas être relative à la différence des biens de B et de C, puisque cette différence est déterminée par les deux premières connoissances.

Autres exercices. Les biens de quatre personnes : A, B, C, D, sont déterminés par les conditions suivantes, relatives aux sommes de ces biens pris trois à trois :

$$A + B + C = 60.$$
$$A + B + D = 72.$$
$$A + C + D = 90.$$
$$B + C + D = 102.$$

On demande leurs biens particuliers.

Les biens des cinq personnes A, B, C, D, E, sont déterminés par les conditions suivantes, relatives aux sommes de ces biens pris quatre à quatre :

$$\begin{array}{lllllllll}
A & + & B & + & C & + & D & & & = 48. \\
A & + & B & + & C & & & + & E & = 56. \\
A & + & B & & & + & D & + & E & = 64. \\
A & & & + & C & + & D & + & E & = 72. \\
 & & B & + & C & + & D & + & E & = 76.
\end{array}$$

On demande leurs biens particuliers.

§ 8.ᵉ *Problème.* Un moribond laisse sa femme enceinte ; il fait son testament de la manière suivante : Si sa femme accouche d'un garçon, il donne 14000 fr. à cet enfant et 7000 fr. à sa mère. Si elle accouche d'une fille, il donne 7000 francs à cet enfant et 14000 francs à la mère. Elle accouche d'un garçon et d'une fille. Comment doit-on partager l'héritage ?

Arith. L'intention du testateur paroît être que la portion de la mère soit double de la portion de la fille ; et que la portion du fils soit double de la portion de la mère, c'est-à-dire, quadruple de la portion de la fille. Partant, tout l'héritage doit être partagé en sept parties égales, dont une pour la fille, deux pour la mère, et quatre pour le fils. Mais l'héritage est de 21000 francs : donc, les portions de la fille, de la mère et du fils sont 5000, 6000, 12000, respectivement.

Algébr. Dénom. Part de la fille . x.
Part de la mère . $2x$.
Part du fils . . $4x$.
Somme . . $7x$.

Cond. $7x = 21000$.
Réd. et *Sol.* $x = 3000$, part de la fille.
$2x = 6000$, part de la mère.
$4x = 12000$, part du fils.

Vérifi. $3000 + 6000 + 12000 = 21000$.

Autres exercices. Le testament porte que le fils aura 16000 francs et la mère 8000; mais que la mère et la fille auront chacune 12000 fr.

Le fonds d'une société composée de trois personnes A, B, C, est de 36000 fr. La mise de B est double de la mise de A, et la mise de C est triple de la mise de B. On demande leurs mises particulières.

Le fonds d'une société composée de quatre personnes A, B, C, D, est de 200 francs; les mises de B, de C, et de D, sont respectivement double, triple, et quadruple de la mise de A. On demande leurs mises particulières.

Une personne a acheté un même nombre d'aunes d'étoffe de quatre prix différens, qui sont : 12 fr., 15 fr., 20 fr., 25 fr. Elle a

payé pour le tout 864 fr. On demande le nombre des aunes achetées.

Un ouvrier peut faire un certain ouvrage dans trois jours, en travaillant huit heures par jour; un autre ouvrier peut le faire dans quatre jours en travaillant dix heures par jour. On les fait travailler ensemble : on demande dans combien de jours l'ouvrage sera fait.

Un réservoir peut être rempli dans 4 jours par un tuyau, duquel l'eau coule avec une vîtesse uniforme; et il peut être vidé dans cinq jours par un tuyau duquel l'eau est supposée s'écouler aussi uniformément : dans combien de jours le réservoir sera-t-il rempli, en ouvrant ensemble les deux tuyaux?

§ 9. *Problème.* Une personne engage un domestique pour un an ou douze mois, et lui promet pour son salaire 144 francs, et un habit de livrée. Au bout de sept mois, le domestique sort, il reçoit pour ses gages 54 francs, et garde son habit; ce qui étoit ce qui lui revenoit. On demande à combien l'habit est estimé.

Arith. Le salaire de ce domestique pour sept mois, est les $\frac{7}{12}$ de son salaire pour une

année ; savoir : la somme de 84 francs et des $\frac{7}{12}$ de la valeur de l'habit ; mais ce salaire est la somme de 54 francs et de l'habit ; donc, l'habit est éstimé valoir la somme de 30 francs et des $\frac{7}{12}$ de lui-même ; donc les $\frac{5}{12}$ de l'habit valent 30 franos ; $\frac{1}{12}$ de l'habit vaut 6 francs, et l'habit vaut 72 fr.

Alg. Dén. Valeur de l'habit . . . x.
Salaire annuel. . $144+x$.
Salaire pour 7 mois $84+\frac{7}{12}x$.

C. $54+x=84+\frac{7}{12}x$.
R. $x=30+\frac{7}{12}x$; $\frac{5}{12}x=30$; $\frac{1}{12}x=6$.
S. $x=72$; $144+x=216$; $84+\frac{7}{12}x=126$.
V. $54+72=126$.

Autre exercice. Le salaire d'un domestique est de 164 fr. et d'une livrée.

Au bout de 9 mois, il reçoit pour solde 84 francs.

§ 10e. *Problème.* L'âge d'un père est triple de l'âge de son fils ; mais dans 12 ans, il n'en sera que le double. On demande leurs âges.

Arith. L'âge du père étant triple de l'âge de son fils, ce dernier âge augmentant de 12 ans, pour que le père demeurât trois fois aussi âgé que son fils, son âge devroit augmen-

menter de 36 ans; mais il augmente de 12 ans seulement : donc, dans 12 ans, il manquera 24 ans à l'âge du père, pour qu'il soit triple de l'âge du fils. Mais, puisque dans 12 ans, le père est seulement deux fois aussi âgé que son fils, il lui manque alors l'âge de son fils, pour être trois fois aussi âgé que lui. Donc, l'âge du fils, dans 12 ans, sera 24 ans, et son âge présent est 12 ans.

Age présent du fils	12.
Age présent du père . . .	36.
Age du fils dans 12 ans . .	24.
Age du père dans 12 ans . .	$48 = 2 \times 24$.

Algéb. Dén.	Age présent du fils .	x.
	Age présent du père .	$3x$.
	Second âge du fils . .	$x+12$.
	Second âge du père .	$3x+12$.

Cond. $3x+12=2x+24$.

Réd. $1x+12= \quad 24$.

$1x \quad = \quad 12$.

Solut.	$x=12$,	âge présent du fils.
	$3x=36$,	âge présent du père.
	$x+12=24$,	second âge du fils.
	$3x+12=48$,	second âge du père.

Vér. $48 = 2 \times 24$.

Autres exerc. Le bien de A est quadruple du bien de B. Mais s'ils gagnent, l'un et l'autre, 20 fr., le bien de A ne sera plus que triple du bien de B.

Le bien de B est les $\frac{2}{5}$ du bien de A. Mais s'ils gagnent, l'un et l'autre, 24 fr., le bien de B deviendra les $\frac{5}{4}$ du bien de A.

A est trois fois aussi riche que B; mais si A gagne à B 50 fr., il deviendra quatre fois aussi riche que B.

Le bien de A est les $\frac{5}{4}$ du bien de B; mais si A perd 24 fr., et si B gagne 16 fr., le bien de A ne sera plus que les $\frac{2}{5}$ du bien de B.

Le bien de A est les $\frac{4}{5}$ du bien de B; mais s'ils perdent, l'un et l'autre, 20 fr., le bien de A sera les $\frac{5}{4}$ du bien de B.

§ 11e. Les exercices du § précédent offrent des exemples de la multiplication d'une quantité algébrique, composée de deux termes, par un nombre.

Et d'abord, pour multiplier par un nombre une quantité algébrique, composée d'un seul terme, on multiplie le coefficient de ce terme par ce nombre. Ainsi, les produits de $2x$

par les nombres 3, 4, 5, 6, ...
sont respectivement $6x$, $8x$, $10x$, $12x$. . . . . .

Pour multiplier par un nombre une quantité algrébrique, composée de deux termes, on multiplie par ce terme chacun de ces nombres, et on conserve aux produits les signes de ces termes.

Exemple.

Multiplicandes	$3x + 4$,	$2x - 5$,	$9 - 2x$.
Multiplicateurs . . .	5,	6,	7.
Produits	$15x + 20$,	$12x - 30$,	$63 - 14x$.

§ 12[e]. *Problème.* Un père a 40 ans, et son fils en a 15. Dans combien d'années le père sera-t-il deux fois seulement aussi âgé que son fils ?

Arith. Puisque les deux âges augmentent d'une même quantité, leur différence est toujours la même ; mais originairement cette différence est 25, donc aussi, au bout du tems cherché, cette différence sera 25. Donc, la question est réduite à une question du même genre que celles du § 2[e]. Trouver deux nombres, dont l'un est double de l'autre, et dont la différence est 25. On trouve :

2[me]. âge du fils, 25. Nombre cherché d'années 10.
2[me]. âge du père, 50.

Alg. Dén. Nomb. cherché d'années x.

Second âge du père . . . $40+x$.

Second âge du fils . . . . $15+x$.

C. $40+x = 2(15+x)$ (*a*).

R. $40+x = 30+2x$

$10+x = 2x$ (en ôtant 30 à chaque membre).

$10 = x$ (en ôtant x à chaque membre).

S. $x=10$. nombre cherché d'années.

$40+x=50$. second âge du père.

$15+x=25$. second âge du fils.

V. $50=2\times25$.

Autres exercices. A possède 60 fr., et B possède 48 fr. Quelle est la somme que A doit gagner à B, pour que A soit deux fois aussi riche que B?

Item. Quelle est la somme que B doit gagner à A pour qu'ils soient également riches.

A possède 84 fr., et B en possède 72. Quelle est la somme qu'ils doivent perdre l'un et l'au-

---

(*a*) En enfermant entre deux parenthèses le multiplicande, on indique qu'on doit prendre les produits de chacun de ses termes par le multiplicateur.

tre, pour que A soit deux fois aussi riche que B.

Quel est le bien d'une personne, si elle doit être deux fois aussi riche après avoir gagné 10000 fr., qu'après en avoir gagné 4000?

Quel est le bien d'une personne qui, après avoir gagné 10000 fr., sera trois fois aussi riche, qu'après les avoir perdus?

§ 12e. *Problème.* A et B ont fait une gageure de 12 louis. Si A la gagne, il sera trois fois aussi riche que B; mais si A la perd, il ne sera que deux fois aussi riche que B. Quels sont leurs biens?

Arith. Quoiqu'on propose de considérer les biens de ces deux personnes dans trois états différens; savoir: leurs biens actuels, et les biens de chacune d'elles, après son gain et après sa perte, on peut réduire cette question à celles de la nature du § 9e, dans lesquelles il s'agit de la comparaison de ces biens dans deux états seulement.

En effet, A et B auront chacun 24 fr. après leur gain de plus qu'après leur perte. Partant, la question proposée est la même que la suivante: le bien de A (après son gain) est triple du bien de B (après sa perte); mais si B gagne 24 louis à A, ce dernier ne

sera plus que deux fois aussi riche que le premier. On trouve par un raisonnement semblable à celui du § 9^me:

Biens de B.	Biens de A.
Après sa perte, 72.	Après son gain, 216.
Après son gain, 96.	Après sa perte, 192.
Premier bien, 84.	Premier bien, 204.

Alg. Dén. Biens de B.	Biens de A.
Après sa perte x.	Après son gain, $2x+72$.
Premier bien $x+12$.	Premier bien, $2x+60$.
Après son gain $x+24$.	Après sa perte, $2x+48$.

Cond. $2x+72=3x$.

Réd. $72=1x$.

Solut. Biens de B.	Biens de A.
$x=72$, après sa p^te.	Après gain, $2x+72=216$.
$x+12=84$ 1^er. bien.	1^er. bien, $2x+60=204$.
$x+24=96$ après g.	Après p.^te, $2x+48=192$.

Vérification.

$216=3\times72$.

Autres exercices. Si A et B gagnent, l'un et l'autre, une même somme de 24 fr., A sera deux fois aussi riche que B; mais s'ils perdent, l'un et l'autre, cette même somme de 24 fr. A sera trois fois aussi riche que B.

Si A gagne 24 fr., et que B en perde 16, A sera trois fois aussi riche que B; mais si

B gagne 20 fr., et que A en perde 12, A sera trois fois aussi riche que B.

§ 14^e. *Problème*. Les biens de quatre personnes A, B, C, D, sont déterminés par les conditions suivantes. A et B ont entr'elles deux 160 fr. C et D ont entr'elles deux 120 fr. Le bien de A est double du bien de C, et le bien de D est triple du bien de B. On demande leurs biens particuliers.

Arith. Puisque le bien de A est double du bien de C, si on conçoit une cinquième personne B^1; telle que la somme des biens de A et de B^1 soit double de la somme des biens de C et de D; c'est-à-dire 240; aussi le bien de B^1 sera double du bien de D, c'est-à-dire, sextuple du bien de B. Mais, puisque la somme des biens de A et de B est seulement 100, le bien de B^1 surpasse le bien de B de 140. Partant, la question est réduite à une autre du même genre que celles du § 2^d: trouver les biens de deux personnes B^1 et B en sachant que la différence de leurs bien est 140, et que la première, est six fois aussi riche que la seconde.

On trouve : bien de B, 28. Bien de D, 84.
de là bien de A, 72. . . . C 36.

Algéb.

Alg. Dén. Bien de C, x. Bien de D, $120-x$.
Bien de A, $2x$. Bien de B, $100-2x$.

C. $120-x=3(100-2x)$.
R. $120-x=300-6x$.
$120+5x=300$, en ajoutant $6x$ à chaque membre.
$5x=180$, en ôtant 120 à chaque membre.

Sol. $1x=36$, b. de C. $120-x=84$, b. de D.
$2x=72$, b. de A. $100-2x=28$, b. de B.
Vér. $84=3\times 28$.

Autre exemple.

A et B ont entr'eux deux 150 fr.
C possède de plus que D . . 50.
Le bien de A est double du bien de C.
Le bien de B est triple du bien de D.

A et B ont entr'eux deux . . 78 fr.
C possède de plus que D . . 52.
Le bien de C vaut 4 fois le bien de A.
Le bien de B vaut 3 fois le bien de D.

A possède 100 fr. de plus que B.
C possède 120 fr. de plus que D.
Le bien de C vaut trois fois le bien de A.
Le bien de B vaut deux fois le bien de D.

§ 15^e^. *Prob.* Les biens de six personnes A, B, C, D, E, F, sont déterminés par les conditions suivantes : $A+B = 100$. $A = 2C$.
$C+D = 125$. $D = 3E$.
$E+F = 150$. $F = 4B$.

Arith. Puisque le bien de A est double du bien de C, si on introduit B^1 tel que $A+B^1 = 250$, on aura $B^1 = 2D = 6E$, et $B^1 - B = 150$. Partant, la question proposée sur six quantités est réduite à une question sur quatre quantités, correspondante à quelqu'une de celles du § 13^me^, par laquelle on a les quatre conditions $B^1 - B = 150$. $B^1 = 6E$.
$E+F = 150$. $F = 4B$.

Alg. Dén. B^n de B x, A $100 - x$.
. . . . F $4x$, E $150 - 4x$.
D $450 - 12x$.
C $125 - (450 - 12x)$.
$= 12x - 325$.

Cond. $100 - x = 2(12x - 325)$.
Réd. $100 - x = 24x - 650$.
$750 - x = 24x$, en ajoutant 650 à chaque membre.
$750 = 25x$, en ajoutant x à chaque membre.

Sol. $x = 30$, bien de B. $100 - x = 70$, b. de A.
$4x = 120$, bien de F. $150 - 4x = 30$, b. de C.
$450 - 12x = 90$, b. de D.
$12x - 325 = 35$, b. de C.

Vér: $70 = 2 \times 35$.

Autres exerc. Les biens de 8 personnes, A, B, C, D, E, F, G, H, sont déterminés par les conditions suivantes :

A et B ont entr'elles deux . . . 121.
C et D . . . . 121.
E et F . . . . 121.
G et H . . . . 121.

A est deux fois aussi riche que . C.
E, trois . . . . B.
D, quatre . . . . G.
H, cinq . . . . F.

Le problème développé dans ce §, a fourni l'exemple d'une soustraction dans laquelle le minuende est composé de deux termes précédés de signes opposés. Savoir, de 125, on a dû ôter $450 - 12x$. Je vais développer à cette occasion, la règle de la soustraction.

De $6x$ qu'on doive ôter $4x$, le reste est $2x$.
De $6x$ qu'on doive ôter $4x + 3$, le reste est $2x - 3$.

Que de $6x$ on doive ôter $4x - 3$: ayant ôté $4x$, on a ôté 3 de trop ; donc le reste doit être de 3 unités plus grand, et partant, au lieu d'être $2x$, il sera $2x + 3$.

Minuende .	$6x$.
Subtrahende	$4x - 3$.
Reste .	$2x + 3$.

En effet, au subtrahende . .	$4x - 3$,
Soit ajouté le reste	$2x + 3$;
On obtient le minuende . .	$6x$.

Dans le cas du problème proposé, on a :

Minuende	125.
Subtrahende . . .	$450 - 12x$.
Reste . .	$125 - 450 + 12x$.
	$= 12x - 325$.

D'après ce raisonnement, on ramène la soustraction à une addition, en changeant les signes des termes de la quantité à soustraire.

§ 16[e]. *Problème.* Il y a un nombre composé de deux caractères, dont la somme prise sans aucun égard à leur ordre, est 7; si à ce nombre on ajoute 27, on aura un nombre composé des mêmes caractères, mais placés dans un ordre renversé.

Arith. Les nombres composés de deux ca-

ractères dont la somme est 7, sont : 16, 25, 34, 43, 52, 61. Les paires de ces nombres composées des mêmes caractères placés dans un ordre renversé, sont : $\frac{61}{16}$, $\frac{52}{25}$, $\frac{43}{34}$.

Les différences des nombres qui composent une même paire, sont : 45, 27, 9.

A la seconde de ces paires, répond la différence proposée, 27 : donc, les nombres cherchés, sont : 25 et 52.

Alg. Dén. Caractère des dizaines du nombre cherché . . . x.

Unités. . . . . $7-x$.

Nombre cherché . . $10x+(7-x)=9x+7$.

Dizaines du second nombre . $7-x$.

Unités . . . . x.

Second nombre $(70-10x)+x=70-9x$.

Cond. $9x+7+27=70-9x$.

Réd. $9x+34=70-9x$.

$18x+34=70$.

$18x=56$.

Sol. $x=2$.

$7-x=5$.

$9x+7=25$.

$70-9x=52$.

Vér. $25+27=52$.

Aut. exerc. Somme des caractères des nombres cherchés	6,	8,	10.
Différence des nombres composés des mêmes caractères,	36,	54,	18.

Il y a un nombre composé de deux caractères ; celui des dizaines surpasse celui des unités, de 4 ; la somme de ce nombre et de celui qui est composé des mêmes caractères placés dans un ordre renversé, est 110.

Remarque. Lorsque deux nombres sont composés des mêmes caractères placés dans un ordre renversé, la somme de ces deux nombres vaut 11 fois la somme de ces caractères; et la différence de ces nombres, vaut 9 fois la différence des mêmes caractères : partant, la somme et la différence de ces deux nombres, sont repectivement déterminées par la somme et par la différence de leurs caractères. Partant, si on donne les deux sommes ou les deux différences, le problème est indéterminé ou impossible, suivant que les conditions données s'accordent entr'elles ou sont contradictoires.

Puisque la différence des deux nombres vaut 9 fois la différence des caractères, cette dernière différence est déterminée dans la

première, et partant, le problème proposé est réduit à un autre du même genre que ceux du § 6me. Ainsi, dans l'exemple proposé, la différence des deux caractères est $\frac{1}{9}$.me partie de 27 ou 3.

De même, la somme des caractères des deux nombres proposés, est $\frac{1}{11}$.me partie de la somme de ces nombres; et partant, quand on connoît la différence des deux caractères et la somme des deux nombres, on connoît la différence et la somme des deux caractères.

§ 17e. *Problème.* Une personne achète 24 aunes d'étoffe de deux espèces différentes. Les unes coûtent 18 fr. l'aune, et les autres coûtent seulement 15 fr. l'aune. Elle a payé pour le tout 408 fr. On demande le nombre des aunes de chaque espèce.

Arith. Si toutes les aunes avoient été payées 18 fr., on auroit payé 432 fr.; mais on a payé 408 fr. seulement : donc on auroit payé 24 fr. de plus qu'on n'a payé réellement. Or, pour chaque aune à 15 fr., on paie 3 fr. de moins que pour une aune à 18 fr.; et partant, quand on achète quelques aunes à 18 fr., et quelques aunes à 15 fr., on paie moins que si on payoit toutes les aunes à 18 fr.; la différence 3 fr. prise autant de fois qu'il y a

d'aunes à 15 fr. Donc, 3 fr. pris autant de fois qu'il y a d'aunes, à 15 fr., font 24 fr.; donc un seul franc, pris le même nombre de fois, fait 8 fr.; donc le nombre des aunes à 15 fr., est 8.

Nombre des aunes.		Prix des aunes.	
A 15 fr. . . .	8.	A 15 fr. . . .	120.
18	16.	18	288.
		Prix total	408.

Alg. Dén. Nomb. des aunes à 18 fr. x.

. . . . 15 . $24-x$.

Prix des premières aunes . . . $18x$.

Prix des secondes aunes . $360-15x$.

Prix total . . . . $360+3x$.

Cond. $360+3x=408$.

Réd. $3x=48$.

Sol. $x=16$, aunes à 18 fr.

$24-x=8$, aunes à 15 fr.

$18x=288$, prix des 1[res]. aunes.

$360-15x=120$, prix des 2[des]. aunes.

Vér. $288+120=408$.

Autres exercices. Une personne qui possède 100 000 fr., les fait valoir une partie au 5 %, et l'autre partie au 4 %. Elle retire pour le tout 4 640 fr. d'intérêt.

Quelqu'un engage un ouvrier pour 48 jours.

Chaque jour, qu'il travaille, il reçoit 24 sols; et chaque jour, qu'il ne travaille pas, on lui retient 12 sols (pour sa nourriture) : au bout des 48 jours, il reçoit, pour solde de son compte, 504 sols. Combien y a-t-il de jours de travail, et de jours d'oisiveté ?

Item. Au bout de 48 jours, cet ouvrier se trouve devoir, pour solde, 144 sols.

Une personne place un certain capital, au $5\frac{0}{0}$, et 10 000 fr. de plus au $6\frac{0}{0}$; elle retire pour les deux capitaux, 2 360 francs d'intérêt.

On emploie un certain nombre d'ouvriers, qu'on paie sur le pied de 30 sols, et 12 ouvriers, de plus, sur le pied de 24 sols. On a payé aux premiers ouvriers, de plus qu'aux seconds ouvriers, 504 sols. Combien y a-t-il d'ouvriers à chaque prix ?

Item. Les seconds ouvriers reçoivent, de plus que les premiers, 96 sols.

Un lingot, allié d'or et d'argent, pèse hors de l'eau 209 grains, et il pèse dans l'eau 192 grains. On demande le poids de l'or, et celui de l'argent.

Remarque. Ce dernier exercice est relatif à la fameuse couronne d'Hiéron, analysée par Archimède, sans aucune décomposition : il est

fondé sur le principe hydrostatique suivant, trouvé par cet ingénieux mathématicien.

Un corps plus pesant que l'eau, étant plongé dans l'eau, perd une partie de son poids, égale au poids du volume d'eau qu'il déplace.

En particulier, en supposant que l'or est 19 fois aussi pesant que l'eau, un lingot d'or, plongé dans l'eau, perd $\frac{1}{19}$ partie de son poids : et en supposant que l'argent est 11 fois aussi pesant que l'eau, un lingot d'argent, pesé dans l'eau, perd $\frac{1}{11}$ partie de son poids.

Partant, le poids du lingot proposé étant diminué de 17 grains : la question proposée revient à partager 209, en deux parties, telles, que la somme de $\frac{1}{19}$ d'une des parties, et de $\frac{1}{11}$ de l'autre partie, fasse 17; ou bien, à partager 17 en deux parties, telles que la somme des produits d'une des parties, par 19, et de l'autre partie, par 11, fasse 209.

§ 18^e^. *Problème*. Une paysanne vend au marché un demi-œuf de plus que la moitié de ses œufs. Dans une seconde occasion, elle vend encore un demi-œuf de plus que la moitié des œufs qui lui restoient. Dans une troisième occasion, elle vend encore un de-

mi-œuf, de plus que la moitié des œufs qui lui sont restés après la seconde vente. Alors, elle a vendu tous ses œufs. Combien en avoit-elle ?

Arith. Supposons qu'à chaque occasion, elle ait vendu séparément d'abord la moitié de ses œufs, puis un demi-œuf.

Avant qu'elle vendît un demi-œuf, à la troisième occasion, elle auroit eu un demi-œuf, et ce demi-œuf auroit été ce qui lui seroit resté après qu'elle auroit vendu la moitié de ses œufs. Donc, avant qu'elle vendît rien à cette troisième rencontre, elle avoit un œuf entier.

Cet œuf est ce qui lui seroit resté après avoir vendu un demi-œuf à la seconde rencontre : donc, elle avoit auparavant $1\frac{1}{2}$ œuf; et ce dernier nombre, est ce qui lui est resté, après avoir vendu la moitié de ses œufs à la seconde rencontre. Donc, avant de rien vendre à la seconde occasion, elle en avoit le double; savoir : 3 œufs.

Ces trois œufs lui seroient restés après avoir vendu un demi-œuf, à la première rencontre. Donc, avant cette vente, elle avoit $3\frac{1}{2}$ œufs, et avant de rien vendre à la première occasion, elle avoit le double; savoir, 7 œufs.

Premier nombre d'œufs.	7.
Après la vente de la moitié il resteroit	$3\frac{1}{2}$.
Après les ventes à la première rencontre	3.
Après la vente de la moitié . . .	$1\frac{1}{2}$.
Après les ventes à la seconde rencontre	1.
Après la vente de la moitié . . .	$\frac{1}{2}$.
Après les ventes à la troisième occasion	0.

Dén. 1[er]. nombre d'œufs x.

Après les ventes,

à la 1[re] rencontre, $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

. . . 2[de]. . . . . . $\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}x-\frac{3}{4}$.

. . . 3[me]. . . . . . $\frac{1}{8}x-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1}{8}x-\frac{7}{8}$.

Cond. $\frac{1}{8}x-\frac{7}{8}=0$.

Réd. $1x-7=0$; $x=7$, ainsi que par le premier procédé.

Autres exercices. Les nombres d'occasions sont, 4, 5, 6. . . . . . Les nombres d'œufs qui lui restent, sont quelqu'un des nombres, 1, 2, 3, 4. . . . . .

Dans chaque occasion, elle vend les $\frac{2}{5}$ d'un œuf de plus que les $\frac{2}{3}$ de ses œufs. Le nombre des occasions est 3, 4, 5, 6. . . . . . Les nombres d'œufs qui lui restent sont quelqu'un des nombres, 1, 2, 3, 4, 5. . . . . .

§ 19. *Problème.* Un jardinier plante des arbres en quarré plein, il a 8 arbres de reste. Il met un rang de plus, et un arbre de plus à chaque rang (pour conserver la forme quarrée); il lui manque 11 arbres pour exécuter ce dernier arrangement. Combien vouloit-il mettre d'arbres à chaque rang, ou combien faisoit-il de rangs, et combien avoit-il d'arbres?

Arithmétiquement. En exécutant différens arrangemens quarrés successifs, on verra que quand on augmente d'une unité tant le nombre des rangs, que le nombre des arbres de chaque rang, on augmente le nombre des arbres placés, de deux fois le nombre des arbres de chaque rang, et outre cela d'une unité. Mais, le nombre des arbres placés dans le second arrangement, auroit surpassé le nombre des arbres placés dans le premier arrangement, de la somme du nombre 8 des arbres qui sont restés après le premier arrangement, et du nombre 11 des arbres qui ont manqué pour exécuter le second, c'est-à-dire, de 19. Donc, le double du nombre des arbres de chaque rang, suivant le premier arrangement, augmenté d'une unité, fait 19; donc, ce double est 18, et le nombre des arbres de cha-

que rang, suivant le premier arrangement, est 9.

Premier arrangement.

Arbres de chaque rang. . . . . . . 9.
Nombre des rangs . . . . 9.
Arbres placés . . . . 81.
Arbres du jardinier . . . $81+8=89$.

Second arrangement.

Arbres de chaque rang . 10.
Nombre des rangs . . . 10.
Arbres placés . . . . 100.
Arbres du jardinier . . $100-11=89$.

Alg. Dén. Premier arrangement.

Arbres de chaque rang . . . x
Nombre des rangs x
Arbres placés . . . . $x \times x = x$.
Arbres du jardinier . . . . $xx+8$.

Second arrangement.

Arbres de chaque rang . . $x+1$.
Nombre des rangs . . . $x+1$.
Arbres placés . . . . . . $xx+2x+1$.
Arbres du jardinier . . . $xx+2x-10$.

$$C.\ xx+2x-10=xx+8,$$
$$2x-10=8,$$
$$2x=18.$$

Sol. $x = 9$, nombre des arbres et des rangs suivant le 1er. arrangement.

$xx = 81$ arbres placés.

$xx+8 = 89$ arbres du jardinier.

$x+1 = 10$ nombre des arbres et des rangs, suivant lé 2d. arrangement.

$xx+2x+1=100$ arbres placés.

$xx+2x-10= 89$, arbres du jardinier.

Autres exercices. Il y a un rectangle, dont la longueur est doublé de la largeur : si on augmente chacun de ses côtés d'une toise, sa surface sera augmentée de 49 toises quarrées.

Il y a un rectangle, dont la longueur et la largeur sont entr'elles comme les nombres 4 et 3 (ou dont la largeur est les $\frac{3}{4}$ de la longueur) : si on augmente sa longueur de 3 pieds, et si on augmente sa largeur de quatre pieds, sa surface sera augmentée de 287 pieds quarrés.

Il y a un rectangle, dont la longueur est triple de la largeur. Si on augmente la largeur d'un pied, et si on diminue la longueur d'un pied, la surface sera augmentée de 21 pieds quarrés.

Il y a un rectangle, dont la largeur est les $\frac{4}{5}$ de la longueur : si on augmente la largeur

de 5 pieds, et si on diminue la longueur de 3 pieds, la surface restera la même.

Item. La surface sera augmentée de 12 pieds quarrés.

La largeur est les $\frac{3}{4}$ de la longueur : si on augmente la longueur de 3 pieds, et si on diminue la largeur de 5 pieds, la surface sera diminuée de 8 pieds quarrés.

Il y a un rectangle, dont la longueur est double de la largeur; si on diminue sa largeur d'un pied, et si on diminue sa longueur de deux pieds, sa surface sera diminuée de 31 pieds quarrés.

§ 20. Les exercices du § précédent demandent qu'on multiplie une quantité composée de deux termes, par une quantité composée aussi de deux termes. Les règles, pour tous les cas qui peuvent se présenter, doivent être développées à chaque exercice particulier.

Et dabord, pour multiplier par elle-même une quantité algébrique, ou pour en prendre le quarré, on écrit le produit $x \times x$, en supprimant le signe de la multiplication, xx; de la même manière que pour le produit de x par une quantité numérique.

Si le multiplicande et le multiplicateur, ont

l'un

l'un et l'autre un coefficient numérique, le coefficiens du produit, est le produit des coefficient du multiplicande et du multiplicateur.

Ex. Mult^des.	$2x$,	$3x$,	$4x$,	$5x$. . . .
Mult^rs.	$3x$,	$4x$,	$5x$,	$6x$. . . .
Prod^ts.	$6xx$,	$12xx$,	$20xx$,	$30xx$. . .

Si le multiplicande est composé d'un seul terme, et le multiplicateur de deux termes, le produit est composé des produits du multiplicande, par chaque terme du multiplicateur, et ces produits partiels sont précédés des mêmes signes que les termes du multiplicateur.

Ex. Mult^des.	$2x$,	$3x$,	$4x$,
Mult^rs.	$3x+5$,	$4x+6$,	$3x-4$,
Prod^ts.	$6xx+10x$,	$12xx+18x$;	$12xx-16x$,
Mult^des.	$5x$,	$6x$,	$7x$. . .
Mult^rs.	$4x-5$,	$12-2x$,	$8-3x$. . .
Prod^s.	$20xx-25x$,	$72x-12xx$,	$56x-21xx$. . .

Que le multiplicateur soit la somme d'une quantité algébrique et d'une quantité numérique, le produit sera la somme des produits du multiplicande par chacun des termes du multiplicateur.

Ex.	Multiplicande	$3x+5$.
	Multiplicateur	$4x+7$.
	Produit par $4x$	$12xx+20x$.
	Produit par 7 . . .	$21x+35$.
	Produit total . . .	$12xx+41x+35$.
	Multiplicande	$4x-5$.
	Multiplicateur	$3x+6$.
	Produit par $3x$	$12xx-15x$.
	Produit par 6 . . .	$24x-30$.
	Produit total . . .	$12xx+9x-30$.
	Multiplicande	$5x-4$.
	Multiplicateur	$3x+2$.
	Produit par $3x$	$15xx-12x$.
	Produit par 2	$10x-8$.
	Produit total	$15xx-2x-8$.
	Multiplicande	$9-2x$.
	Multiplicateur	$5+3x$.
	Produit par 5	$45-10x$.
	Produit par $3x$	$27x-6xx$.
	Produit total	$45+17x-6xx$.

Que le multiplicateur soit la différence d'une quantité algébrique et d'une quantité numérique, le produit sera la différence des produits

du multiplicande par les deux termes du multiplicateur.

Ex. Multiplicande . . .	$3x + 4$.
Multiplicateur . . .	$2x - 5$.
Produit par $2x$ . . .	$6xx + 8x$.
Produit par 5 à retrancher .	$15x + 20$.
Reste ou produit total . .	$6xx - 7x - 20$.
Multiplicande . .	$12 + 3x$.
Multiplicateur . .	$15 - 2x$.
Produit par 15 . . .	$180 + 45x$.
Pr. par $2x$ à retrancher .	$24x + 6xx$.
Reste ou produit total .	$180 + 21x - 6xx$.
Multiplicande . . .	$5x + 6$.
Multiplicateur . . .	$4x - 3$.
Produit par $4x$ . . .	$20xx - 24x$.
Pr. par 3 à retrancher .	$15x - 18$.
Reste ou produit total .	$20xx - 39x + 18$.
Multiplicande . . .	$7 - 3x$.
Mutiplicateur . . .	$5 - 2x$.
Produit par 5	$35 - 15x$.
Pr. par $2x$ à retrancher . .	$14x - 6xx$.
Produit total	$35 - 29x + 6xx$.

On voit, par ces exemples, que le pro-

duit des quantités précédées de signes semblables, soit qu'il soit celui de l'addition, soit qu'il soit celui de la soustraction, est précédé du signe de l'addition; et que le produit des quantités précédées de signes différens, est précedé du signe de la soustraction; règle qu'on énonce en abrégé comme il suit: dans la multiplication, les signes semblables donnent, + et les signes différens donnent —.

§ 21°. *Problème.* A et B jouent ensemble. La mise de chacun d'eux, pour la première partie, est égale au bien de B; B gagne cette première partie. Ils jouent une seconde partie, pour laquelle la mise de chacun d'eux est ce qui reste à A, après la perte de la première partie. A gagne cette seconde partie. Alors, ils ont chacun quatre francs. On demande leurs premiers biens.

Arith. A possède quatre francs après le gain de la seconde partie, c'est-à-dire, après avoir doublé ce qui lui restoit après la perte de la première partie. Donc, après la perte de la première partie, A avoit deux francs; et partant, B avoit six francs après avoir gagné la première partie. Donc, originairement, B n'avoit que la moitié de six francs ou trois francs, et B en avoit cinq.

Alg. Dén. 1er. b. de B, x. 1er. b. de A, $8-x$.
Après la 1re. partie, $2x$. . . . . $8-2x$.
Après la 2e. partie, „ . . . . . $16-4x$.

Cond. $16-4x=4$.
Réd. $4-x=1$; $4=x+1$; $x=3$.
Sol. $x=3$; $8-x=5$.
$2x=6$; $8-2x=2$.
$16-4x=4$.

Autres exerc. A et B jouent quatre parties successives; ils les gagnent et perdent alternativement : la mise de chaque joueur est égale au bien de celui qui a le moins, ou de celui qui gagne la partie, pour laquelle il a hasardé tout son bien. A la fin des quatre parties, ils ont chacun 16.

Item. Pour 6 parties, pour 8 parties. . . . . et pour un bien final, de 64, de 256. . . . . .

Item. La mise de chaque joueur est la moitié du bien de celui qui gagne la partie. Après deux parties jouées, chacun d'eux a 9; après quatre parties jouées, chacun d'eux a 81; après six parties jouées, chacun d'eux a 729. . . . . .

§ 22. *Problème.* Un négociant augmente son bien d'un quart par année, après avoir prélevé 3 200 francs pour sa dépense de cette

année. Au bout de deux ans, son bien est augmenté de 18000 francs. On demande son premier bien.

Arith. Si ce négociant n'avoit rien dépensé, son bien, pendant la première année, auroit augmenté d'$\frac{1}{4}$ de lui-même, ou seroit devenu les $\frac{5}{4}$ de lui-même; pendant la seconde année, son bien auroit augmenté d'$\frac{1}{4}$ de ces $\frac{5}{4}$; c'est-à-dire, des $\frac{5}{16}$ de lui-même: donc, à la fin de la seconde année, son bien auroit augmenté de la somme d'$\frac{1}{4}$ et des $\frac{5}{16}$; c'est-à-dire, des $\frac{9}{16}$ de lui-même.

Les 3200 francs, que ce négociant a prélevés au commencement de la première année, auroient augmenté pendant les deux ans des $\frac{9}{16}$ d'eux-mêmes, ou de 1800 francs, et ils seroient devenus 5000 fr.

Les 3200 francs, prélevés au commencement de la seconde année, auroient augmenté pendant cette année, d'$\frac{1}{4}$ d'eux-mêmes; c'est-à-dire, de 800 francs, ils seroient devenus 4000 fr.

Partant, la diminution de son capital, provenant de ces deux levées, est de 9000 fr.; mais, malgré cette diminution, son capital est encore augmenté de 18000 francs. Donc, si ce négociant n'avoit rien dépensé, son ca-

pital auroit augmenté de 27000 fr. Mais, dans cette supposition, son capital auroit augmenté des $\frac{9}{16}$ de lui-même. Donc, les $\frac{9}{16}$ du capital de ce négociant font 27000 fr.; $\frac{1}{16}$ de ce capital vaut 3000 fr.; et le capital lui-même vaut 48000 fr.

Premier capital	48000.
Après la première levée . . .	44800.
Gain de la première année . .	11200.
Capital à la fin de la 1^re. année .	56000.
Après la seconde levée . . .	52800.
Gain de la seconde année . .	13200.
Capital à la fin de la 2^de. année .	66000.
Aug. du capital 66000—48000=18000.	

Alg. Dén. Premier capital . .	x.
Après la première levée . .	$x-3200$.
Gain de la première année . .	$\frac{1}{4}x-800$.
Capital à la fin de cette année .	$\frac{5}{4}x-4000$.
Après la seconde levée . .	$\frac{5}{4}x-7200$.
Gain de la seconde année . .	$\frac{5}{16}x-1800$.
Capital à la fin de cette année	$\frac{25}{16}x-9000$.
Augmentation du capital . .	$\frac{9}{16}x-9000$.

Cond. $\frac{9}{16}x-9000=18000$.
Réd. $\frac{9}{16}x=27000$; $\frac{1}{16}x=3000$.
Sol. $x=48000$, ainsi que par le premier procédé.

Aut. exerc. Un négociant augmente son bien d'$\frac{1}{3}$ par année, après avoir prélevé 1250 fr. pour sa dépense de cette année. Au bout de 3 ans, son bien est augmenté de 3640 fr.

Un négociant augmente son bien d'$\frac{1}{6}$ par année, après avoir prélevé 1296 francs pour sa dépense de cette année. Au bout de quatre ans, cette personne possède 9072 francs. On demande son premier bien.

Un négociant possède 51200 fr. qui sont placés dans un commerce, dans lequel il augmente, chaque année, son bien d'$\frac{1}{4}$ de lui-même, après avoir prélevé une somme fixe au commencement de chaque année. Au bout de quatre ans, il se trouve posséder 18450 fr. On demande sa dépense annuelle.

Une personne possède 25220 fr. qu'elle fait valoir au 5%. Elle a de quoi vivre pendant un an. Elle compte mourir au bout de quatre ans, et ne veut rien laisser à ses héritiers. On demande quelle doit être sa dépense annuelle.

Item. Pour un capital de 689620 fr. et pour cinq ans de vie.

Un négociant augmente son bien d'$\frac{1}{5}$, par année, après avoir prélevé 2700 fr. pour sa dépense de cette année. Au bout de trois

ans, il est deux fois aussi riche qu'il l'étoit d'abord. On demande son premier bien.

Item. Pour une levée annuelle de 28928 fr., un gain d'$\frac{1}{4}$, et un terme de quatre ans, au bout desquels le bien est doublé.

Item. Pour une levée annuelle de 131000 fr. pour un gain de 10$\frac{0}{0}$, et pour un terme de trois ans, au bout desquels le bien est augmenté d'$\frac{1}{5}$.

§ 23e. *Problème.* Un père fait son testament de la manière suivante :

Il donne à l'aîné de ses enfans, 3600 fr. et la sixième partie du reste de son bien. Il donne au second deux fois 3600 fr., soit 7200 fr. et la sixième partie du reste. Il donne au troisième trois fois 3600 fr., soit 10800 fr. et la sixième partie du reste, et ainsi de suite, en augmentant de 3600 fr. la première portion de chaque enfant successif.

Par cette disposition, tout l'héritage est également partagé entre tous les enfans.

On demande le nombre des enfans, la part de chacun et la valeur de l'héritage.

Arith. Si le dernier des enfans avoit une seconde portion, tout l'héritage ne seroit pas partagé; ce qui est contre la supposition. Donc, le dernier des enfans n'a point de seconde por-

tion, et sa part est 3600 fr. pris autant de fois qu'il y a d'enfans.

La première part de l'avant-dernier enfant est moindre de 3600 fr. que la première part du dernier ; mais leurs parts doivent être égales : donc, la seconde part de l'avant-dernier est 3600 fr.

Puisque cette seconde part de l'avant-dernier, est la sixième partie de ce qu'il y avoit à l'héritage, avant qu'il la prît, ce qu'il a laissé en est les $\frac{5}{6}$: donc, ce qu'il a laissé vaut 5 fois cette seconde part, c'est-à-dire, 5 fois 3600 fr. Mais, ce qu'il a laissé, est la part du cadet des enfans ; c'est-à-dire, 3600 fr. pris autant de fois qu'il y a d'enfans.

Donc, le nombre des enfans est cinq : chacun d'eux a $5 \times 3600 = 18000$ fr. et l'héritage vaut $3 \times 18000 = 90000$ fr.

Héritage	90000 fr.	1re. part de l'aîné,	3600.
1er. reste	86400.	2de. part de l'aîné,	14400.
		bien de l'aîné,	18000.
2^{d}. reste	72000.	1re. part du 2^{d}.	7200.
3^{me}. reste	64800.	2de. part du 2^{d}.	10800.
		bien du 2^{d}.	18000.

4me. reste	54000.	1re. part du 3me.	10800.
5me. reste	43200.	2de. part du 3me.	7200.
		bien du 3me.	18000.
6me. reste	36000.	1re. part du 4me.	14400.
7me. reste	21600.	2de. part du 4me.	3600.
		bien du 4me.	18000.
8me. reste	18000.	1re. part du 5me.	18000.
9me. reste	0.	2de. part du 5me.	0.
		bien du 5me.	18000.

Algéb. Dén. Héritage . . . . . x.

Premier reste . . . . . . $x - 3600$.

Seconde part du premier . . $\frac{1}{6}x - 600$.

Bien du premier . . . . . . $\frac{1}{6}x + 3000$.

Second reste . . . . $\frac{5}{6}x - 3000$.

Troisième reste . . . . . . $\frac{5}{6}x - 10200$.

Seconde part du second . . . $\frac{5}{36}x - 1700$.

Bien du second . . . . . . $\frac{5}{36}x + 5500$.

$C.\ \frac{1}{6}x + 3000 = \frac{5}{36}x + 5500$.

$R.\ \frac{1}{6}x = \frac{5}{36}x + 2500$.

$6x = 5x + 90000$.

$x = 90000$; ainsi qu'on l'a trouvé.

Autres exerc. Les premières portions sont : 3200, 2 × 3200, 3 × 3200, etc. ; et les secondes portions sont les huitièmes parties des restes.

Les 1res. portions sont : 3600, 3×3600, 5×3600, 7×3600, etc. ; et les secondes portions sont les $\frac{2}{9}$ des restes.

§ 24. On démontre en géométrie que, dans tout polyhèdre (ou solide terminé par des figures planes, seulement), la somme du nombre des faces et du nombre des angles solides surpasse de deux unités le nombre des arrêtes.

On peut tirer de cette proposition, par le calcul, la possibilité des solides, construits sous des conditions données, relatives aux nombres des côtés des polygones qui les terminent et aux nombres des faces dont leurs angles solides sont composés.

Exemple. Quels sont les solides dont tous les angles solides sont formés par trois angles de triangles ?

Arith. Puisque chaque face fournit trois angles plans, et que chaque angle solide est aussi composé de trois angles plans, le nombre des faces est le même que le nombre des angles solides, et la somme de ces deux nombres, vaut deux fois l'un d'entr'eux. Le nombre des côtés de toutes les faces détachées est triple du nombre des faces ; et comme deux côtés se réunissent pour former une arrête, le

nombre des arrêtes vaut une fois et demi le nombre des faces : donc, le double du nombre des faces surpasse de deux unités une fois et demi le même nombre : donc, la moitié du nombre des faces est 2, et le nombre des faces est 4.

Nombre des faces	4.
Nombre des angles plans . . .	12.
Nombre des angles solides . .	4.
Nombre des arrêtes	6.

Tous les solides dont chaque angle solide est formé par trois angles plans, sont des pyramides triangulaires, ou des *tétrahèdres-tétragones.*

Alg. Dén. Nombre des angles solides n.

Nombre des angles plans	$3n$.
Nombre des faces	$1n$.
Nombre des arrêtes	$\frac{3}{2}n$.

Cond. $n+n=\frac{3}{2}n+2$.

Réd. $2n=\frac{3}{2}n+2$.

$4n=3n+4$.

$n=4$, nombre des angles solides et des faces.

Autr. exempl. Quels sont les solides, dont chaque angle solide est formé par quatre angles de triangles ?

Dén. Nombre des angles solides . . . n.
Nombre des angles plans . . . . $4n$.
Nombre des faces. . . . . $\frac{4}{3}n$.
Nombre des arrêtes . . . . . . $2n$.

C. $n+\frac{4}{3}n=2n+2$.
R. $2n+\frac{1}{3}n=2n+2$.
$\frac{1}{3}n= \quad 2$.
Sol. $n= \quad 6$, nomb. des ang. solides.
$\frac{4}{3}n= \quad 8$, nombre des faces.
$2n= \quad 12$, nomb. des arrêtes.
Vér. $6+8= \quad 12+2$.

Tous les solides, dont chaque angle solide est formé par quatre angles de triangle (quels que soient ces triangles, réguliers ou non), sont composés de huit faces et de six angles solides. Ce sont des *octahèdres-hexagones*.

Autres exerc. Déterminer les solides dont chaque angle solide est formé par cinq angles de triangles.

Déterminer les solides dont chaque angle solide est formé par trois angles de quadrilatères.

Déterminer les solides dont chaque angle solide est formé par trois angles de pentagones.

D'après la même proposition, on peut déterminer l'impossibilité des solides construits

sous des conditions énoncées, lorsqu'elles sont incompatibles.

Exemples. Peut-on trouver des solides dont chaque angle solide est formé par six angles de triangles ?

Dém. Soit s'il est possible le nombre des
angles solides . . . . n,
le nombre des angles plans sera . . $6n$,
le nombre des arêtes . . . . . . $3n$,
le nombre des faces . . . . $2n$.

Cond. $n+2n=3n+2$.
ou $3n=3n+2$; ce qui est impossible.

De même, peut-on trouver des solides dont chaque angle solide soit formé par quatre angles de quadrilatères, ou par quatre angles de pentagones, ou par trois angles d'hexagones, etc ?

Autres exerc. Déterminer les solides dont chaque angle solide est formé par deux angles de triangles, et par deux angles de quadrilatères ; *item*, par un angle de quadrilatère, et par deux angles d'hexagones.

Soit un solide terminé par des rhombes qui peuvent convenir. Que quelques-uns des angles solides soient formés par trois angles obtus de ces rhombes, et que les autres soient

formés par quatre angles aigus des mêmes rhombes; on demande le nombre de ses faces et celui de ses angles solides.

Item. Que les derniers angles solides soient formés par cinq angles aigus.

Item. Est-il possible que ces derniers angles soient formés par six angles aigus ?

§ 25. Petits jeux sur les nombres, proposés comme exercices.

Une personne ayant un jeu de 32 cartes, en tire trois, sur chacune desquelles elle met autant de cartes qu'il en faut pour que ce dernier nombre, joint au nombre des points de la carte, sur laquelle elle les a mises, fasse 15. Il lui reste 8 cartes. Quelle est la somme des points des trois premières cartes ?

Item. Que les restes soient, 6, 7, 9. . . . !

Que le nombre des tas soit 4; que le nombre des points de la carte inférieure et du nombre des cartes mises sur elle, soit 12; que le nombre des cartes restantes soit 5, 6, 7, 8. . . . . .

Que le jeu soit composé de 52 cartes; que le nombre des tas soit 5; que la somme du nombre des points de la carte inférieure et du nombre des cartes mises sur elle, soit 16; que

que le nombre des cartes restantes soit 8, 9, 10, 11, 12.......

A dit à B de penser un nombre, de le doubler, d'ajouter à ce double 8, et de prendre la moitié de la somme. B dit alors qu'il lui vient 10 pour cette moitié. Comment A doit-il s'y prendre pour trouver le nombre pensé par B?

Item. B triple le nombre pensé, ajoute 15 à ce triple, prend le tiers de la somme, et annonce 12 pour résultat.

Le dortoir d'un couvent est composé de 8 cellules, qui forment le contour d'un quarré. Dans chaque cellule demeurent trois religieuses. Quatre de ces religieuses se sont en allées; et celles qui restent se placent, de manière que le nombre des religieuses, dans chaque rang, est le même que dans le premier cas.

Item. Le nombre des personnes, au lieu de diminuer de quatre, augmente de quatre ou de huit.

Le nombre des personnes de chaque cellule est cinq; leur nombre diminue de quatre ou de huit, ou il augmente de quatre, huit, douze ou seize.

Item. La figure du couvent est pentagone;

le nombre des religieuses de chaque cellule est originairement 5; et le nombre de celles qui se retirent est 5 ou 10; ou le nombre de celles qui viennent les visiter est 5, 10, 15, 20.

Quelqu'un ayant 25 jetons, les place en partie aux sommets d'un triangle équilatéral, et en partie au centre de ce triangle; de manière que le nombre des jetons placés au centre et à un des angles, soit toujours le même, savoir, 9. On distrait deux de ces jetons, et on dispose ceux qui restent, de manière que la somme des jetons du milieu et d'un des angles, continue de faire 9. Le même, pour 4, 6, 8 jetons soustraits.

Le même pour un quarré, pour 32 jetons; pour la somme 11 de deux jetons placés au milieu et à un angle, et pour une soustraction de 3, 6, 9, 12 jetons.

CHAPITRE II.

Problèmes généraux du premier degré à une seule inconnue.

§ 26. DANS le chapitre précédent, l'introduction des signes destinés à représenter les quantités inconnues, est la seule différence entre l'algèbre et l'arithmétique, dont nous nous sommes occupés. Je passe à une autre différence non moins importante entre ces deux sciences. Quoique les règles de l'arithmétique soient générales, et que des procédés semblables s'appliquent à la solution de toutes les questions du même genre, cependant, dans cette science, on n'opère que sur des signes particuliers, et on ne résout que des questions individuelles. En algèbre, on représente les quantités connues elles-mêmes par des signes généraux, auxquels, dans chaque cas particulier, on peut substituer les valeurs particulières correspondantes. On résout ainsi à la fois toutes les questions du même genre; et même souvent (comme nous le verrons) dans un sens plus étendu

que celui sous lequel on les avoit originairement considérées.

On désigne ordinairement les quantités connues par les premières lettres de l'alphabet, par exemple, par *a*, *b*, *c*, *d*. Cependant, on désigne aussi quelquefois une quantité donnée par la lettre initiale du mot qui l'exprime. Ainsi, il nous arrivera de désigner par *s* et par *d*, la somme et la différence de deux quantités.

On exécute sur les quantités données, exprimées d'une manière générale, les opérations de l'arithmétique, ou l'on indique ces opérations par les signes convenus pour les représenter.

Si les quantités sont exprimées par un même caractère, on exécute sur leurs signes les opérations d'addition et de soustraction, en faisant ces opérations sur leurs coefficiens.

Exemp. $2a+3a=5a$; $5a-3a=2a$.

Si les quantités sont exprimées par des caractères différens, on indique l'addition ou la soustraction qu'on se propose de faire par les signes de ces opérations. Ainsi, les expressions $a+b$, et $a-b$, indiquent l'intention où l'on est d'ajouter b avec a, ou de retrancher b de a.

Si les quantités à ajouter sont composées de deux ou de plusieurs termes, et si parmi ces termes, il y en a dans les différens addendes d'une même espèce précédés d'un même signe, on les ajoute en conservant dans la somme le même signe. Si les signes sont différens, on fait la soustraction des termes semblables, et on met à la somme le signe de la plus grande quantité.

Ex. Addendes	$3a+5b.$	$3a+5b.$	$3a+2b.$
	$4a+2b.$	$2a-3b.$	$2a-5b.$
Sommes	$7a+7b.$	$5a+2b.$	$5a-3b.$

On convertit la soustraction en addition, en changeant les signes de chacun des termes du subtrahende.

Ex. Minuendes . .	$a,$	$a.$
Subtrahendes .	$b+c$	$b-c.$
Restes . .	$a-b-c$	$a-b+c.$

En effet, si de a on devoit ôter b, il resteroit $a-b$; mais puisqu'on devoit ôter c de moins que b, le reste doit être plus grand de la quantité c; il est donc $a-b+c$.

Si on ajoute le subtrahende	$b-c$
au reste	$a-b+c,$
on obtient en effet le minuende	$a.$

La multiplication des quantités monomes (ou composées d'un seul terme) s'indique en écrivant ces quantités à la suite l'une de l'autre, et en suprimant le signe de la multiplication. Ainsi, le produit $a \times b$ ou $b \times a$, s'exprime par ab ou ba. Si les deux quantités sont les mêmes, a et a, leur produit s'exprime indifféremment par aa ou par a^2, et ce produit est appelé le quarré de l'une de ces quantités.

On appelle facteur d'un produit chacun des termes qui le forment. Ainsi, abc est le produit continuel des quantités a, b, c, et chacune de ces quantités est un facteur de ce produit. De même, chacune des quantités a, b, c, d, est un facteur de leur produit continuel $abcd$. Si les quantités à multiplier sont égales entr'elles, leur produit est appelé une *puissance* de l'une d'elles; l'*exposant* de la puissance indique combien de fois on la prend comme facteur; et il se place à la droite de cette quantité un peu au-dessus d'elle. Ainsi, aaa ou a^3 est la troisième puissance de a; $aaaa$ ou a^4 est la quatrième puissance de a; et en général a^m indique qu'on prend a, m fois comme facteur, ou a^m est la m^{me} puissance de a.

Si les quantités à multiplier ont des coefficiens numériques, le coefficient de leur produit est le produit de leurs coefficiens. Ex. $2a \times 3b = 6ab$; $2a \times 3b \times 4c = 24abc$ (1).

Une quantité est appelée, binome, trinome, quadrinome, etc., ... suivant qu'elle est composée de deux, de trois, de quatre, etc. termes, joints par les signes de l'addition et de la soustraction.

Le produit d'un binome par un autre binome est la somme ou la différence des produits du multiplicande par les termes du multiplicateur, suivant que ce dernier est la somme ou la différence de ses termes.

Ex. Mult$^{\text{des}}$.	$a+b$	$a-b$ ....
Mult$^{\text{rs}}$.	$c+d$	$c+d$ .....
Prod$^{\text{ts}}$. par c, .	$ac+bc$, ...	$ac-bc$ ....
Pr$^{\text{ts}}$. p$^{\text{r}}$ d, à aj$^{\text{r}}$. ...	$ad+bd$	$ad-bd$;
Prod$^{\text{s}}$.	$ac+bc+ad+bd$.	$ac-bc+ad-bd$.
Mult$^{\text{des}}$.	$a+b$	$a-b$ ....
Mult$^{\text{rs}}$.	$c-d$., ...	$c-d$ .....
Prod$^{\text{ts}}$. par c, .	$ac+bc$	$ac-bc$. ...
P$^{\text{ts}}$. p$^{\text{r}}$. d à ôter ...	$ad+bd$	$ad-bd$.
Produits	$ac+bc-ad-bd$.	$ac-bc-ad+bd$.

(1) On désigne aussi la multiplication par un point mis entre les facteurs. Ainsi, $a.b.c = a \times b \times c$.

On voit, par ce tableau, que la règle de la multiplication, quant aux signes, est réduite aux règles de l'addition et de la soustraction, et on obtient la règle générale suivante. Les produits de deux quantités précédées de signes semblables, sont précédés du signe de l'addition; et les produits de deux quantités précédées de signes différens, sont précédés du signe de la soustraction. On exprime cette règle en abrégé, comme il suit: les signes semblables donnent +, et les signes différens donnent —.

En particulier, que les deux facteurs binomes soient les mêmes, ou que l'on prenne le quarré de l'un d'entr'eux.

On obtient
$$(a+b)^2=aa+2ab+bb,$$
$$(a-b)^2=aa-2ab+bb,$$
savoir; le quarré de la somme de deux quantités est composé de la somme de leurs quarrés et de deux fois leur produit, et le quarré de la différence de deux quantités, est l'excès de la somme de leurs quarrés sur deux fois leur produit.

Aut. ex. $(a+b)(a-b)=aa-bb$, savoir; le produit de la somme par la différence de deux quantités est égal à la différence de leurs quarrés.

Pendant long-tems nous seront peu appelés à exécuter des divisions, surtout sur des expressions composées; et comme le développement complet de cette opération me paroît demander des connoissances qui ne peuvent être données dès le début, je me contenterai d'en exposer les premiers principes sur quelques cas simples.

1°. Que le dividende et le diviseur soient composés, l'un et l'autre, d'un seul terme.

Si ces deux termes n'ont aucun facteur commun, on ne peut qu'indiquer la division sans l'exécuter. *Ex.* $\frac{ab}{c}$ indique l'intention où l'on est de diviser ab par c.

Si le dividende et le diviseur ont quelque facteur commun, on l'efface à l'un et à l'autre.

Ainsi : $\frac{ab}{a}=\frac{a\times b}{a\times 1}=b$; $\frac{6abc}{3ab}=2c$; $\frac{aabc}{ab}=ac$; $\frac{a^4bc}{a^2b}=a^2c$; $\frac{6abc}{8ad}=\frac{3bc}{4d}$.

2°. Que le diviseur soit monome, et que le dividende soit composé de deux ou de plusieurs termes.

Le quotient est la somme ou la différence

des quotiens, de chacun des termes du dividende par le diviseur. *Exemp.*

$$\frac{ab+ac}{a}=\frac{ab}{a}+\frac{ac}{a}=b+c;\ \frac{abc+bef}{ab}=c+\frac{ef}{a}.$$

3°. Que le diviseur soit composé de deux termes, et que le dividende soit composé de deux ou de plusieurs termes.

Si les termes du dividende et du diviseur n'ont aucun facteur commun d'une seule lettre, la division ne peut être qu'indiquée.

Ainsi, $\frac{a+b}{c+d}$ indique l'intention où l'on est de diviser $a+b$ par $c+d$.

Que parmi les termes du dividende et du diviseur, il y en ait quelqu'un ou quelques-uns qui contiennent une même lettre comme facteur : soient disposés ou ordonnés ces termes, suivant cette lettre, de manière à mettre les premiers, soit dans le dividende, soit dans le diviseur, ceux de ces termes, dans lesquels cette lettre entre le plus grand nombre de fois comme facteur, ou a le plus grand nombre de dimensions; et successivement après eux les termes dans lesquels les dimensions de cette lettre diminuent aussi successivement.

Soit divisé le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur ; soit pris le produit du diviseur par le quotient ; du dividende, soit retranché ce produit ; soit descendu (s'il y a lieu) le terme suivant du dividende ; et soit opéré sur le reste de la même manière, jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les termes du dividende.

1er. *Exemp.* $aa+3ab+2bb$ dividende.
$a+\ b$ diviseur.

Le quotient de aa divisé par a, ou le premier terme du quotient est a ; le produit de $a+b$ par a est $aa+ab$; retranchant ce produit des deux premiers termes du dividende, il reste $2ab$; soit descendu à côté de ce reste le terme suivant $2bb$: soit divisé $2ab$ par a, le quotient est $2b$; le produit de $a+b$ par $2b$, est $2ab+2bb$, lequel étant retranché de la partie restante du dividende, ne donne aucun reste.

Tableau de l'opération.

$$\begin{array}{l|l} aa+3ab+2bb & a+b \\ \hline aa+ab & a+2b \\ \cline{1-1} \quad\ 2ab+2bb & \\ \quad\ 2ab+2bb & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad 0. & \end{array}$$

En effet, $aa+3ab+2bb.$

$$\begin{array}{l} =aa+ab \\ \quad +2ab+2bb \end{array} = \begin{array}{l} a(a+b) \\ +2b(a+b) \end{array}$$

$$=(a+b)(a+2b).$$

Autr. ex. Dividende . . $2aa+7ab+6bb.$

Diviseur . . . $a+2b,$

Quotient . . . $2a+3b.$

En effet, $2aa+7ab+6bb.$

$$\begin{array}{l} =2aa+4ab \\ \quad +3ab+6bb \end{array} = \begin{array}{l} 2a(a+2b). \\ +3b(a+2b) \end{array}$$

$$=(a+2b)(2a+3b).$$

Dividende . . $a^3-b^3.$

Diviseur . . . $a-b.$

Quotient . . . $aa+ab+bb.$

Tableau de cette dernière opération.

$$\begin{array}{llll|l} a^3 & * & * & -b^3 & a-b \\ \hline a^3-aab & & & & aa+ab+bb \\ \hline +aab & & & & \\ aab-abb & & & & \\ \hline & +abb-b^3 & & & \\ & abb-b^3 & & & \\ \hline & & o. & & \end{array}$$

En effet, $a^3 \quad * \quad * \quad -b^3$

$$\begin{array}{l} =a^3-aab \\ \quad +aab-abb \\ \qquad +abb-b^3 \end{array} = \begin{array}{l} aa(a-b) \\ +ab(a-b) \\ +bb(a-b) \end{array}$$

$$=(a-b)(aa+ab+bb).$$

Dans cet exemple, comme il n'y a aucun terme affecté soit de aa soit de a, on a réservé les places de ces termes, comme on le voit dans le tableau de l'opération.

La règle des signes est la même que celle de la multiplication; savoir, le quotient d'une quantité divisée par une autre, est précédé du signe de l'addition ou de celui de la soustraction, suivant que le dividende et le diviseur sont précédés de signes semblables ou de signes différens.

Ex. Dividende . . $a^3 * * +b^3$
Diviseur . . . $a+b$.
Quotient . . . $aa-ab+bb$.

Tableau de l'opération :

$$\begin{array}{l|l} a^3 \; * \quad * \; +b^3 & a+b \\ \hline a^3+aab & aa-ab+bb. \\ \hline \quad -aab & \\ \quad -aab-abb & \\ \hline \qquad\quad +abb+b^3. & \end{array}$$

En effet : $a^3 \quad * \quad * \quad +b^3$

$$\begin{aligned} &= a^3+aab && aa(a+b) \\ &\quad -aab-abb && = -ab(a+b) \\ &\qquad\quad +abb+b^3 && +bb(a+b) \\ &= (a+b)(aa-ab+bb). \end{aligned}$$

Dans les cas où l'on obtient un reste qui ne contient pas le premier terme du diviseur, ou bien, on indique l'intention où l'on est de diviser le reste par le diviseur, ou bien on emploie des moyens d'approximation dont nous parlerons dans la suite.

Les opérations sur les fractions algébriques s'exécutent de la même manière que sur les fractions numériques.

Ainsi, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$.

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

On a vu, dans l'arithmétique, que le rapport de deux quantités, ou plutôt l'exposant de ce rapport, est le quotient indiqué de l'une divisée par l'autre: ainsi, la fraction $\frac{a}{b}$ est l'exposant du rapport de a à b; ou le quotient indiqué de la division de a par b.

Apès avoir établi ces préliminaires sur les premières opérations à exécuter sur les quantités algébriques, je passe à quelques-unes des questions traitées d'une manière particu-

lière dans le chapitre premier. Et comme le principal but de ce chapitre est d'introduire et d'exercer au calcul littéral, je ne répéterai pas la marche du procédé arithmétique, qu'il seroit facile de généraliser.

§ 27^e^. Les questions traitées dans le § 6^me^. énoncées généralement, reviennent à la suivante. Trouver deux nombres dont on connoît la somme s et la différence d.

Dén. Que la petite quantité soit . x.
La grande quantité sera . . . $x+d$.
Somme . . . . $2x+d$.

Cond. $2x+d = s$.

Réd. $2x = s-d$.

Sol. $x = \frac{s-d}{2} = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$.

$x+d = \frac{s+d}{2} = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$.

Vér. $2x+d = s$.

Remarque I^re^. On a appelé *formules*, les expressions générales d'une quantité dans une ou plusieurs autres quantités. Ainsi, les expressions $s+d$, $s-d$, sont les formules suivant lesquelles deux quantités sont exprimées dans leur somme et dans leur différence, et elles se traduisent du langage algébrique en français comme il suit :

Quand on connoît la somme et la différence de deux quantités, la plus petite vaut la demi-somme moins la demi-différence; et la plus grande vaut la demi-somme plus la demi-différence.

Ex. $s=120$, $\frac{1}{2}s=60$, $\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}d=72$ gr^{de}. quan^{te}.
$d=24$, $\frac{1}{2}d=12$, $\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d=48$ p^{te} quan^{te}.

Remarque 2°. Pour que le problème soit résolu dans le sens propre de l'énoncé, on doit avoir $\frac{1}{2}s>\frac{1}{2}d$, ou $s>d$ (1). En effet, la somme des deux quantités est plus grande que leur différence, en prenant ces expressions dans leur acception propre et originaire.

Si celui qui propose la question (soit par défaut de réflexion, soit pour embarrasser celui à qui il la propose), donnoit $s<d$, on obtiendroit pour la valeur de la petite quantité une expression affectée du signe de la soustraction, ou une valeur soustractive. L'introduction de ce signe serviroit à corriger l'énoncé

(1) On a désigné l'inégalité de deux quantités par les signes $>$ et $<$, suivant que la première est plus grande ou plus petite que la seconde. Ainsi, les expressions $\begin{matrix} s>d \\ s<d \end{matrix}$ se lisent ainsi : s est plus $\begin{matrix}\text{grand}\\ \text{petit}\end{matrix}$ que d.

nonce de la question proposée, et montreroit que s est, au contraire, la différence des deux quantités cherchées, et que d est leur somme, en les affectant l'une et l'autre du signe de l'addition.

Ex. Soit $s=20$, $\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}d=10+12=22$.
$d=24$, $\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}d=10-12=-2$.

En changeant le signe de cette dernière quantité, leur somme est 24, et leur différence est 20.

L'algèbre n'exige pas cette dernière conversion. Quoique les signes $+$ et $-$ ne soient dans leur origine que l'indication des opérations à faire sur les quantités qu'ils précèdent, en sorte que les expressions $a+b$ et $a-b$ indiquent qu'on doit ajouter ou ôter b à a, on est convenu de joindre le signe qui précède une quantité avec cette quantité même, de manière à en composer une expression unique, et à regarder les expressions $+a$ et $-b$ comme désignant chacune des quantités de leur espèce. On dit donc, dans un sens général (et qu'on pourroit appeler figuré) que la soustraction $a-b$ est l'addition de $+a$ à $-b$, et que ajouter b à a, c'est soustraire $-b$ de $+a$; savoir $a+b=a-(-b)$.

Pour conserver à la dénomination de ces nouveaux signes un emblème de leur origine, n'auroit-il pas convenu d'appeler *expressions additives* et *expressions soustractives* les combinaisons formées des quantités et des signes des deux opérations qu'on doit exécuter sur elles? L'usage a prévalu de les appeler *quantités positives* et *quantités négatives*. Pourvu qu'en se servant de ces expressions, on n'oublie pas leur véritable signification tirée de leur origine, cette dénomination ne peut avoir aucun inconvénient. On a aussi proposé de les appeler quantités directes, et quantités indirectes; mais ces dernières expressions sont déjà employées dans un sens différent, soit en arithmétique, soit en algèbre.

Je vais éclaircir ces dénominations par quelques exemples familiers.

Pour estimer le bien d'une personne, de son avoir on soustrait son devoir. Les dettes ont été appelées un avoir ou un bien négatif. Et comme la diminution des dettes produit une augmentation de fortune, on a dit que la soustraction du bien négatif équivaloit à une addition. Une perte est appelée un gain négatif; la descente est appelée une montée

négative; le mouvement d'orient en occident, rétrograde relativement au mouvement d'occident en orient, est appelé négatif, relativement à ce dernier pris pour positif (1).

§ 28e. Trouver les biens de trois personnes, A, B, C, en connoissant les sommes de leurs biens pris deux à deux.

Que la somme des biens de A et de B soit c.
Que la somme des biens de A et de C soit b.
Que la somme des biens de B et de C soit a.

Dén. Somme des trois biens . . x.
Bien de C . . . . $x-c$.
Bien de B . . . . $x-b$.
Bien de A . . . . $x-a$.
Sme. des b. de A et de B $2x-a-b=2x-(a+b)$.

C. $2x-(a+b)=c$.
R. $2x=a+b+c$.

---

(1) La question que nous avons résolue dans ce §, malgré son extrême simplicité, trouve des applications fréquentes; nous en verrons dans la suite des exemples nombreux. Je me contenterai de remarquer qu'elle m'a servi de base dans l'examen que j'ai fait d'un mode séduisant d'élection proposé par CONDORCET, et adopté à Genève jusqu'à ce que j'en aie fait voir les inconvéniens.

S. $x \qquad = \frac{a+b+c}{2}$, somme des 3 biens.

$x-c = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2c}{2} = \frac{a+b-c}{2}$, b. de C.

$x-b = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2b}{2} = \frac{a-b+c}{2}$, b. de B.

$x-a = \frac{a+b+c}{2} - \frac{2a}{2} = \frac{-a+b+c}{2}$, bien de A.

Vér. $\frac{a-b+c}{2} + \frac{-a+b+c}{2} = c.$

Partant, la somme des trois biens est la demi-somme des trois sommes données des biens pris deux à deux; et chaque bien particulier, est la moitié de l'excès de la somme des deux sommes données dont ce bien fait partie, sur la somme dont il ne fait pas partie.

Remarque 1re. Pour que le problème soit résolu dans le sens propre de l'énoncé, de la demi-somme des trois nombres donnés, on doit pouvoir retrancher chacun d'eux; ou, ce qui revient au même, la somme de deux quelconques des trois nombres donnés ne doit pas être plus petite que le nombre restant. Si cela a lieu, le mot *somme* est pris dans le sens propre, et chacun des biens cherchés est positif; si la somme de deux des nombres donnés est plus petite que

le troisième, le bien qui ne fait pas partie de ce dernier nombre, est négatif; le mot somme est pris deux fois dans le sens de différence, en sorte que les deux autres nombres donnés, sont les excès des deux autres biens sur ce dernier nombre regardé comme positif.

Ex. $a=40.\quad \frac{a+b-c}{2}=-6$, bien de C, ou 6 dette de C.
$b=48.\quad \frac{a-b+c}{2}=+46$, bien de B.
$c=100.$

$$\frac{-a+b+c}{2}=+54\text{, bien de A.}$$

On a en effet,
$$46-6=40.$$
$$54-6=48.$$
$$46+54=100.$$

Soit proposée la question :

La somme des biens de A et de B est c.
L'excès du bien de A sur le bien de C est b.
L'excès du bien de B sur le bien de C est a.

Excès de la somme des biens de A et de B sur le bien de C . . . . x.
Bien de C . . . . $c-x$.
Bien de B . . . . $a+c-x$.
Bien de A . . . . $b+c-x$.
Somme des biens de A et de B $a+b+2c-2x$.

Cond. $a+b+2c-2x=c.$

Réd. $2x = a+b+c.$

Sol. $x = \frac{a+b+c}{2}.$

$$c-x=\frac{-a-b+c}{2}.$$

$$a+c-x=\frac{a-b+c}{2}.$$

$$b+c-x=\frac{-a+b+c}{2}.$$

Pour que le problème soit résolu dans le sens propre de l'énoncé, la somme donnée doit être plus grande que la somme des deux différences; alors elle est, à plus forte raison, plus grande que chacune des différences des deux différences. Si la somme est donnée plus petite que la somme des deux différences, la question revient à la première.

Ces deux questions sont donc liées l'une avec l'autre d'une manière si intime, que l'on obtient la réponse à l'une ou à l'autre, suivant les grandeurs des quantités données; et que l'introduction de l'une ou de l'autre de ces réponses ne dépend pas du calculateur, mais de celui qui propose la question.

Remarque 2[de]. La connoissance de deux

des sommes détermine la différence des deux biens qui font partie de l'une et de l'autre, et partant, la question dans laquelle on énonceroit comme connues ces deux sommes et cette différence, ne renfermeroit que deux conditions indépendantes l'une de l'autre, tandis qu'il y a trois quantités cherchées. Le problème seroit donc indéterminé.

Aut. exerc. Trouver quatre nombres en connoissant leurs sommes, trois à trois; cinq nombres, en connoissant leurs sommes quatre à quatre, etc. etc. . . . .

§ 29. *Problème.* Un voleur s'enfuit en faisant v lieues dans un tems donné, par exemple, un jour; un archer part t jours après du même lieu, et le poursuit en faisant u lieues par jour. On demande dans combien de jours l'archer atteindra le voleur, et les chemins qu'ils auront faits l'un et l'autre.

Dén.	Jours de marche de l'archer	x.
	Jours de marche du voleur .	$x+t$.
	Chemin fait par l'archer .	ux.
	Chemin fait par le voleur	$vx+vt$.

C. $ux=vx+vt$.

R. $ux-vx=vt$ ou $x(u-v)=vt$.

S. $x=\frac{vt}{u-v}$, jours de marche de l'archer.

$x+t=\frac{ut}{u-v}$, jours de marche du voleur.

$ux=u\times\frac{u-v}{vt}=\frac{uvt}{u-v}$, chemin de l'ar.

$vx+vt=v\times\frac{ut}{u-v}=\frac{uvt}{u-v}$, chemin du vol.

Vér. $u\times\frac{vt}{u-v}=v\times\frac{ut}{u-v}$.

Partant, pour avoir le nombre des jours de marche de l'archer, on doit diviser le chemin vt qui les sépare, par la différence $u-v$ de leurs chemins journaliers.

Ex. Soit $u=10$; $v=8$; $t=9$.

$vt=72$; $u-v=2$; $\frac{vt}{u-v}=\frac{72}{2}=36$.

Rem. 1^re^. La question suppose que l'archer se meut plus vîte que le voleur, afin que la rencontre puisse avoir lieu, ou que $u>v$. Aussi, l'équation $ux=vx+vt$ a-t-elle été résolue conformément à cette supposition.

Si le voleur est en effet parti avant l'archer, et que cependant l'archer se meuve avec la même vîtesse que le voleur, la rencontre est impossible, et l'équation devient

$o=vt$. Cette impossibilité est indiquée en algèbre par l'expression $\frac{vt}{o}$, ou en général par $\frac{1}{o}$.

Mais en supposant $u=v$, si on suppose en même tems $t=o$, ou que l'archer et le voleur partent ensemble, ils se trouvent dans un état perpétuel de rencontre, et partant, le problème est indéterminé. Dans la fraction $\frac{vt}{u-v}$, qui exprime le tems cherché, les deux termes évanouissent en même tems, et l'expression $\frac{o}{o}$ devient alors le signe de l'indétermination ou d'une rencontre perpétuelle.

Rem. 2[de]. Au lieu de donner $u>v$, ainsi que cela doit être pour que la question soit possible dans le sens de l'énoncé, si on donne $u<v$, l'équation $ux=vx+vt$, résolue conformément à cette supposition, devient $vx-ux=-vt$, et $x=-\frac{vt}{v-u}$. Le changement de signe du tems cherché indique que ce tems, au lieu d'être pris dans l'avenir, doit être pris dans le passé, et la question proposée revient à la suivante. Deux personnes sont parties ensemble d'un même point et dans une même direction; l'une en

faisant v lieues par jour, et l'autre en faisant u lieues par jour. Dans combien de jours seront-elles éloignées, l'une de l'autre, d'un intervalle donné vt? Ou bien, le chemin parcouru par chacune de ces deux personnes étant $-u\times\frac{vt}{v-u}$, ou $-v\times\frac{ut}{v-u}$, cela montre que les directions doivent être prises dans un sens opposé à celui selon lequel on les a supposées originairement; et que ces deux personnes rétrogradant au moment du départ de celle qu'on regardoit comme poursuivante, celle qui étoit regardée comme la poursuivie, devient la poursuivante, et réciproquement.

Rem. 3[me]. Si on applique la formule trouvée pour la supposition $u>v$, à la supposition contraire $u<v$, cette formule $\frac{vt}{u-v}$ a un dénominateur négatif, et cette formule doit être la même que $-\frac{vt}{v-u}$, qui est tirée d'une manière légitime de la supposition. Aussi, je pense que cette dernière est la seule admissible, et que la première ne peut être tolérée qu'en tant qu'on peut la ramener à la dernière, en corrigeant la marche contraire

à la supposition, qu'on a suivie pour l'obtenir.

Rem. 4me. Soit $vt=D$ l'intervalle qui sépare les deux voyageurs. Au lieu de supposer que ces deux personnes se meuvent dans un même sens, ou que l'une poursuit l'autre, si on suppose qu'elles se meuvent dans des sens opposés, ou que l'une vient au devant de l'autre, on trouvera, en résolvant ce cas immédiatement, le chemin parcouru par le premier $D\times\frac{v}{u+v}$; et le chemin parcouru par le second $D\times\frac{u}{u+v}$. Ces formules peuvent aussi être tirées, des formules du premier cas, en changeant dans le dénominateur le signe de v, qui indique un changement de direction du mobile qui se meut avec la vîtesse v.

Rem. 5me. Ces deux problèmes envisagés sous un point de vue plus général, reviennent à l'un des suivans. Trouver une quantité en connoissant la différence ou la somme de ses produits par deux quantités données. Trouver deux quantités dont on connoît la différence ou la somme et le rapport. En effet, les chemins faits par ces deux voyageurs, dans un même tems, sont les produits de ce tems

par leurs vîtesses respectives ; ou bien, ils sont entr'eux comme leurs vîtesses.

§ 30. *Problème.* Le bien de A vaut m fois le bien de B. Mais s'ils gagnent, le premier la somme a, et le second la somme b, le bien de A vaudra n fois le bien de B.

Dén. 1^er^. bien de B, x; 2^d^. b. de B, $x+b$.
1^er^. bien de A, mx; 2^d^. b. de A, $mx+a$.

Cond. $mx+a=n(x+b)$.
Réd. $mx+a=nx+nb$.

1^er^. *Cas.* Soit $m=n$; pour que le problème soit possible, on doit avoir $a=nb$; et alors, toute valeur de x satisfait à la question, ou elle est indéterminée. En effet, si le bien de A vaut un nombre quelconque de fois le bien de B; et si le premier bien subit une augmentation qui vaille le même nombre de fois une augmentation du second bien; aussi le second bien de A vaudra le même nombre de fois le second bien de B.

2^d^. *Cas.* $m>n$. $mx-nx=x(m-n)=nb-a$.

Sol. $x=\frac{nb-a}{m-n}$, 1^er^. bien de B.

$mx=m\times\frac{nb-a}{m-n}$, 1^er^. bien de A.

$$x+b=\frac{mb-a}{m-n}, \text{ 2}^{d}\text{. bien de B.}$$

$$mx+a=\frac{mnb-na}{m-n}, \text{ 2}^{d}\text{. bien de A.}$$

Vér. $\frac{mnb-na}{m-n}=n\times\frac{mb-a}{m-n}$.

3^me^. *Cas.* $m<n$. $nx-mx=x(n-m)=a-nb$.

Sol. $x=\frac{a-nb}{n-m}$, 1^er^. bien de B.

$$mx=m\times\frac{a-nb}{n-m}, \text{ 1}^{er}\text{. bien de A.}$$

$$x+b=\frac{a-mb}{n-m}, \text{ 2}^{d}\text{. bien de B.}$$

$$mx+a=\frac{na-mnb}{n-m}, \text{ 2}^{d}\text{. bien de A.}$$

Vér. $\frac{na-mnb}{n-m}=n\times\frac{a-mb}{n-m}$.

Ex. Soit $m=4$, $n=2$; $a=20$, $b=24$.

$$nb=48, nb-a=28; m-n=2; \frac{nb-a}{m-n}=14.$$

$$mb=96, mb-a=76; m-n=2; \frac{mb-a}{m-n}=38.$$

Rem. 1^re^. Les formules du troisième cas, relatives à la supposition $n>m$, diffèrent des formules correspondantes du second cas re-

latives à la supposition $m>n$; seulement par les signes des deux termes des fractions par lesquelles les quantités cherchées sont exprimées. Partant, une fraction étant proposée, on ne change pas sa valeur en changeant les signes de chacun de ses termes. En effet, si les gains de deux personnes sont, numériquement parlant, les mêmes que les pertes de deux autres personnes, ces deux gains se contiennent l'un l'autre de la même manière que ces deux pertes se contiennent l'une l'autre.

Rem. 2[de]. En supposant $m>n$, pour que le problème soit résolu dans le sens propre de l'énoncé, on doit avoir $nb>a$. Dans cette supposition $m>n$, si $nb<a$, les valeurs de x et de mx sont l'une et l'autre négatives, et la question proposée est la suivante : si des quantités données a et b on ôte les biens de A et de B, le premier reste vaut n fois le second; ou, ce qui revient au même, on demande de partager les nombres a et b, l'un et l'autre en deux parties, de manière qu'une partie de a vaille m fois une partie de b, et que l'autre partie de a vaille n fois l'autre partie de b. Dans la même supposition $m>n$, si $mb<a$, ces restes sont en-

core l'un et l'autre négatifs. Au contraire, en supposant $m<n$, si $nb<a$, le problème est résolu dans le sens propre de l'énoncé ; si $nb>a$, les biens de A et de B sont des dettes, et si $mb<a$, les seconds biens de A et de B sont encore des dettes.

Rem. 3me. Si les quantités cherchées sont l'une augmentée et l'autre diminuée, ou l'une et l'autre diminuées des quantités données a et b, on obtiendra les formules relatives à ces cas, en changeant les signes des quantités qui, au lieu d'être additives, sont devenues soustractives.

Soit a une diminution et b une augmentation . . $x=\frac{nb+a}{m-n}$; $x+b=\frac{mb+a}{m-n}$.

Soit a une augmentation, et b une diminution . . . $x=\frac{nb+a}{n-m}$; $x+b-\frac{mb+a}{n-m}$.

Soit a une diminution, et b une diminution . . $x=\begin{array}{c}\frac{-nb+a}{m-n}\\ \frac{nb-a}{n-m}\end{array}$ $x-b=\begin{array}{c}\frac{-mb+a}{m-n}.\\ \frac{mb-a}{n-m}.\end{array}$

On doit faire sur ces formules des observations correspondantes à celles qui ont été faites dans la Remarque seconde.

Rem. 4^{me}. Lorsque a est une augmentation, et b une diminution, on doit avoir $n>m$; et au contraire, si a est une diminution et b une augmentation, on doit avoir $m>n$.

Lorsque a et b sont ou l'un et l'autre une augmentation, ou l'un et l'autre une diminution, si on a $m=n$, on doit avoir $a=mb=nb$, pour que le problème soit possible; et alors il est indéterminé : ce qui est indiqué par la formule $\frac{o}{o}$.

Autres exerc. Si A gagne la somme a, et si B gagne en même tems la somme b, le bien de A vaudra m fois le bien de B. Mais si A gagne la somme c, et si B gagne en même tems la somme d, le bien de A vaudra n fois le bien de B. On demande leurs biens, soit originaires soit après ces changemens.

En combinant de toutes les manières possibles les signes $+$ et $-$ avec les quantités a, b, c, d, on verra que cet énoncé général donne lieu à seize problèmes particuliers, qui cependant peuvent être tous compris sous une même formule. J'en joins ici le tableau.

a	*b*	*c*	*d*.	*a*	*b*	*c*	*d*.
+	+	+	+	—	—	—	—
+	+	+	—	—	—	—	+
+	+	—	+	—	—	+	—
+	—	+	+	—	+	—	—
—	+	+	+	+	—	—	—
+	+	—	—	—	—	+	+
+	—	+	—	—	+	—	+
+	—	—	+	—	+	+	—

§ 31. *Problème.* Quel est le nombre qu'on doit ajouter à deux nombres donnés a et b, pour que la première somme vaille m fois la seconde.

Dén. Nombre cherché . . . x.
Sommes $a+x$, $b+x$.

Cond. $a+x=m(b+x)$.

Réd. $a+x=mb+mx$.

1er. *Cas.* Soit $m=1$; on doit avoir $a=mb=b$, et alors la question est indéterminée.

2d. *Cas.* Soit $m>1$; $x(m-1)=a-mb$.

$$S.\ x=\frac{a-mb}{m-1};\ x+a=\frac{ma-mb}{m-1};\ x+b=\frac{a-b}{m-1}.$$

3me. *Cas.* Soit $m<1$; $x(1-m)=mb-a$.

$$S.\ x=\frac{mb-a}{1-m};\ x+a=\frac{mb-ma}{1-m};\ x+b=\frac{b-a}{1-m}.$$

Rem. 1re. Les formules du troisième cas, sont les mêmes que les formules correspondantes du second cas, en changeant les signes de chacun des termes des fractions qui les expriment.

Rem. 2de. Soit $\begin{matrix} m>1 \\ a>b \end{matrix}$; ou $\begin{matrix} m<1 \\ a<b \end{matrix}$; le problème est résolu dans le sens propre de l'énoncé. Soit $\begin{matrix} m>1 \\ a<b \end{matrix}$; ou $\begin{matrix} m<1 \\ a>b \end{matrix}$; la valeur de x change de signe, et on résout la question : quel est le nombre qu'on doit ôter des deux nombres donnés a et b, pour que le premier reste vaille m fois le second ?

Rem. 3me. Si $m=1$, on doit avoir $a=b$; la question est indéterminée, et son indétermination est indiquée par l'expression $\frac{o}{o}$.

Rem. 4me. Qu'une des quantités a ou b, par exemple b change de signe, on obtient $x=\frac{a+mb}{m-1}$; $b+x=\frac{a+b}{m-1}$.

Que les quantités a et b changent l'une et l'autre de signes, on obtient $x=\frac{-a+mb}{m-1}=\frac{a-mb}{1-m}$.

§ 32. Les questions résolues dans le § 17, envisagées généralement, reviennent à la suivante.

Problème. Trouver deux nombres dont on

connoît la somme ou la différence, et la somme ou la différence de leurs produits par les nombres donnés m et n.

1°. Soit a la somme de deux nombres ; et soit p la somme de leurs produits par les nombres donnés m et n.

Dén. 1er. nombre, x, 1er. produit, mx;
2d. nombre $a-x$. 2d. produit $na-nx$.

Cond. $na+mx-nx=p$.

1er. *Cas.* Soit $m=n$; on doit avoir $na=p$; et le problème est indéterminé.

2d. et 3me. cas. Soit $m>n$ $x(m-n)=p-na$; $m<n$ $x(n-m)=na-p$.

Sol. $x=\begin{cases}\dfrac{p-na}{m-n}\\[2ex] \dfrac{na-p}{n-m}\end{cases}$ $a-x=\begin{cases}\dfrac{ma-p}{m-n}\\[2ex] \dfrac{p-ma}{n-m}\end{cases}$

$mx=\begin{cases}\dfrac{mp-mna}{m-n}\\[2ex] \dfrac{mna-mp}{n-m}\end{cases}$ $na-nx=\begin{cases}\dfrac{mna-np}{m-n}\\[2ex] \dfrac{np-mna}{n-m}\end{cases}$

V. $\dfrac{mp-mna}{m-n}+\dfrac{mna-np}{m-n}=\dfrac{mp-np}{m-n}=p$

$\dfrac{mna-mp}{n-m}+\dfrac{np-mna}{n-m}=\dfrac{np-mp}{n-m}=p.$

Rem. 1re. Si dans les formules obtenues dans les suppositions $m \gtrless n$, on fait la supposition contraire, $m=n$, on obtient le signe de l'impossibilité ou de l'indétermination, suivant qu'on a en même tems $p \gtrless na$ ou $p=na$.

Rem. 2de. En supposant $m>n$, par exemple, pour que la question soit résolue dans le sens propre de l'énoncé, on doit avoir $p \begin{matrix} >na \\ <ma \end{matrix}$.

Soit $p<na$, et à plus forte raison $p<ma$; la première partie est négative et la seconde est positive. Et si $p>ma$, et à plus forte raison $p>na$; la première partie est positive et la seconde est négative. La question proposée est alors relative à deux différences, soit des quantités cherchées, soit de leurs produits par les nombres m et n; de manière que le plus grand des produits répond à la plus grande des deux quantités. On résout donc conjointement l'un ou l'autre de ces deux cas, suivant les grandeurs données de p relativement au nombre donné a et à ses produits par les nombres donnés m et n; et l'une ou

l'autre de ces deux réponses ne dépend pas de la volonté du calculateur, mais elle est déterminée par les conditions énoncées.

2°. Soit a la somme des deux quantités cherchées, et soit p la différence de leurs produits par les nombres donnés m et n.

On obtient $mx-(na-nx)=p$; ou

$$mx+nx=p+na;\ x=\frac{p+na}{m+n};\ a-x=\frac{ma-p}{m+n}.$$

Les formules de ce cas ne diffèrent de celles du premier que par le signe de n; aussi, dit-on, dans le langage algébrique, que, ôter le produit d'une quantité par n, c'est ajouter le produit de cette quantité par $-n$.

Si $ma>p$, la valeur de la seconde partie est conforme à la question dans le sens propre de l'énoncé. Mais si $ma<p$, $a-x=\frac{p-ma}{m+n}$; alors, la quantité a est la différence des deux quantités cherchées, et p est la somme de leurs produits par les nombres donnés m et n.

3°. Soit a l'excès de la première quantité sur la seconde, et soit p l'excès du second produit sur le premier.

Dén. 1re. quantité x; 1er. prod^t. mx.
2de. $x-a$; 2^d. prod^t. $nx-na$.

Cond. $nx-mx-na=p$.

$x=\frac{p+na}{n-m}$. Cette formule ne diffère que par le signe de p de celle du 1°.

$x-a=\frac{p+ma}{n-m}$. Cette formule diffère par le signe de ma de celle du 1°.

§ 33. *Prob.* Trouver les biens de 6 personnes A, B, C, D, E, F, d'après les conditions suivantes.

La somme des biens de A et de B est a.
La somme des biens de C et de D est b.
La somme des biens de E et de F est c.

Le bien de A vaut m fois le bien de C.
Le bien de D vaut n fois le bien de E.
Le bien de F vaut p fois le bien de B.

Dén. Bien de C, x; Bien de D, $b-x$.
Bien de A, mx; Bien de B, $a-mx$.
Bien de F . . . $pa-mpx$.
Bien de E . . $c-pa+mpx$.

Cond. $b-x=n(c-pa+mpx)$.
Réd. $x(mnp+1)=npa+b-nc$.

$$S.\quad x=\frac{npa+b-nc}{mnp+1};\quad b-x=\frac{-npa+mnpb+nc}{mnp+1}.$$

$$mx=\frac{mnpa+mb-mnc}{mnp+1};\quad a-mx=\frac{a-mb+mnc}{mnp+1}.$$

$$pa-mpx=\frac{pa-mpb+mnpc}{mnp+1}.$$

$$c-pa+mpx=\frac{-pa+mpb+c}{mnp+1}.$$

$$V.\quad \frac{-npa+mnpb+nc}{mnp+1}=n.\frac{-pa+mpb+c}{mnp+1}.$$

Rem. Pour que les formules trouvées répondent à la question dans le sens propre de l'énoncé, on doit avoir les trois iné-

galités ; $npa+b>nc$. $a+mnc>mb$. $mpb+c>pa$.

Si quelqu'une de ces inégalités n'a pas lieu, le problème est en partie relatif à des différences des biens cherchés.

Exemp. Soit $npa+b<nc$; les biens de C et de A deviennent l'un et l'autre négatifs; et en changeant leurs signes, les quantités. a et b deviennent les excès des biens de B et de D sur les biens de A et de C respectivement.

En effet, soit proposée la question suivante.

Le bien de B surpasse le bien de A de la quantité a; le bien de D surpasse le bien de C de la quantité b; les quatre autres conditions restant les mêmes.

Dén. Bien de C x. Bien de D $b+x$.
Bien de A mx. Bien de B $a+mx$.
Bien de F . . $pa+mpx$.
Bien de E . $c-pa-mpx$.

Cond. $b+x=n(c-pa-mpx)$.

Réd. $b+x=nc-npa-mnpx$;
$x(1+mnp)=-npa-b+nc$.

Sol. $$x=\frac{-npa-b+nc}{mnp+1}.$$

Pour que cette formule réponde à la seconde question dans le sens propre de son énoncé, on doit avoir $nc>npa+b$; sans quoi, la question, relative à deux différences, est à cet égard relative à deux sommes.

Les deux questions relatives, l'une à trois sommes, et l'autre à une somme et à deux différences, sont liées l'une avec l'autre d'une manière si intime, que les formules trouvées répondent à l'une ou à l'autre de ces deux questions, suivant les grandeurs respectives des quantités données. Quoique le calculateur ait dirigé sa marche vers la question énoncée

sous un certain point de vue, le calcul l'avertit (s'il y a lieu) que ce point de vue étoit trop limité, et qu'il devoit embrasser la question sous un point de vue plus général.

Il est à remarquer que la question étant énoncée comme relative à trois sommes (qui peuvent devenir une somme et deux différences), la question est toujours déterminée et possible. Il n'en seroit pas de même si la question étoit énoncée comme relative à trois différences (qui peuvent devenir une différence et deux sommes).

En effet, que $a, b, c,$ soient les excès des biens de B, D, F, sur les biens de A, C, E, respectivement, les trois autres conditions restant les mêmes.

Dén. Bien de C x. Bien de D $x+b$.
Bien de A mx. Bien de B $mx+a$.
Bien de F $mpx+pa$.
Bien de E $mpx+pa-c$.

Cond. $x+b=n(mpx+pa-c)$.
$=mnpx+npa-nc$.

1er. *Cas.* Soit $mnp=1$.

On doit avoir $b+nc=npa$.
ou $mb+mnc=a$.
$mpb+c=pa$.

Alors, la question est indéterminée. Elle est impossible si la première égalité $mnp=1$ ayant lieu, les autres (ou plutôt l'une d'elles car elles sont identiques), n'ont pas lieu en même tems.

$$2^{d}.\ \text{et}\ 3^{me}.\ \textit{Cas.}\quad \begin{matrix} mnp>1 \\ mnp<1. \end{matrix} \qquad x= \begin{matrix} \dfrac{-npa+b+nc}{mnp-1}. \\[2ex] \dfrac{npa-b-nc}{1-mnp}. \end{matrix}$$

Aut. exerc. Trouver huit quantités A, B, C, D, E, F, G, H, en connoissant les sommes ou les différences deux à deux; de A et de B, de C et de D, de E et de F, de G et de H; et en connoissant les rapports deux à deux, de A à C, de D à E, de F à G, de H à B.

Le cas où le nombre des sommes ou celui des différences est pair, renferme un cas impossible ou indéterminé. Le cas où le nombre des sommes, ou celui des différences est impair est toujours possible et déterminé; en prenant les mots sommes et différences dans leur acception générale ou algébrique.

Item: pour dix quantités, pour douze, etc.

§ 34. *Prob.* Soit un rectangle dont les côtés sont entr'eux comme deux nombres donnés m et n. On altère les côtés de ce rec-

tangle (par addition ou par soustraction) des quantités données a et b. Alors, la surface est altérée de la quantité p. On demande les côtés de ce rectangle.

1°. Que les quantités a et b soient regardées l'une et l'autre comme additives.

Dén. 1ers. côtés du rectangle mx, nx.
2ds. côtés . . . $mx+a$, $nx+b$.
1re. surface . . . . $mnxx$.
2de. surface $mnxx+nax+mbx+ab$.
Augmentation $nax+mbx+ab$.

Cond. $nax+mbx+ab=p$.
Réd. $x(na+mb)=p-ab$.

$$x=\frac{p-ab}{na+mb}.$$

S. $mx=\dfrac{mp-mab}{na+mb}$. $mx+a=\dfrac{mp+naa}{na+mb}$.

$nx=\dfrac{np-nab}{na+mb}$. $nx+b=\dfrac{np+mbb}{na+mb}$.

$$mnxx=\frac{mn(pp-2abp+aabb)}{(na+mb)^2}.$$

$$(mx+a)(nx+b)=\frac{mnp^2+\begin{matrix}n^2a^2\\m^2b^2\end{matrix}p+mna^2b^2}{(na+mb)^2}.$$

$$nax+mbx+ab=\frac{n^2a^2p+2mnabp+m^2b^2p}{(na+mb)^2}.$$

$$=p\times\frac{(na+mb)^2}{(na+mb)^2}=p.$$

Ex. $m=3.\ n=2;\ a=4,\ b=5;\ p=135.$

$ab=20; p-ab=115; \begin{matrix} na=8 \\ mb=15 \end{matrix}; na+mb=23.$

$$x=\frac{p-ab}{na+mb}=\frac{115}{23}=5;\ mx=15;\ nx=10.$$

Rem. 1[re]. Puisque l'augmentation de la surface est $nax+mbx+ab$, cette augmentation est plus grande que ab; et partant, pour que la question soit résolue dans le sens propre de l'énoncé, on doit avoir $p>ab$.

Si on donnoit $p<ab$, les valeurs des côtés du rectangle deviendroient négatives, et on résoudroit la question suivante : si des quantités données a et b, on ôte les côtés du premier rectangle, la surface du second rectangle sera plus grande que celle du premier de la quantité p. En effet,

Les côtés du 2[d]. rect. seroient $a-mx$, $b-nx$.
Sa surface . . . $ab-x(na+mb)+mnxx$.
Augmentation . . $ab-x(na+mb)$.

Soit $ab-x\,(na+mb)=p$; $x=\frac{ab-p}{na+mb}$.

Si p est une diminution . . $x=\frac{ab+p}{na+mb}$.

2°. Que des quantités a et b l'une des deux, par exemple a, soit une augmentation et l'autre b une diminution.

Côtés du second rectangle $mx+a$, $nx-b$.
Seconde surface $mnxx+nax-mbx-ab$.

En supposant $na>mb$, la surface peut être ou augmentée, ou diminuée, ou rester la même.

1re. *Supp.* Soit p une aug. $x=\frac{p+ab}{na-mb}$.

$$mx+a=\frac{mp+naa}{na-mb}. \quad nx-b=\frac{np-mbb}{na-mb}.$$

2de. *S.* Soit p une dim. $x=\frac{ab-p}{na-mb}=\frac{p-ab}{mb-na}$.

$$mx+a=\frac{naa-mp}{na-mb}=\frac{mp-naa}{mb-na};$$

$$nx+b=\frac{mbb-np}{na-mb}=\frac{np-mbb}{mb-na}.$$

Rem. Pour que le problème soit résolu dans le sens propre de l'énoncé, on doit avoir en même tems $\begin{matrix} na>mb \\ ab>p \end{matrix}$; ou $\begin{matrix} mb>na \\ p>ab \end{matrix}$; si on a en même tems $\begin{matrix} ab=p \\ na=mb \end{matrix}$ la question est indéterminée. En effet, la seconde surface est $mnxx-ab$; lorsque $na=mb$.

Soit en même tems $\begin{matrix} na>mb \\ ab<p \end{matrix}$, ou $\begin{matrix} na<mb \\ ab>p \end{matrix}$; les côtés du premier rectangle changent de signe, et on résout la question suivante : si on ôte le premier côté de a, et si on ajoute le second côté à b, la somme des surfaces des deux rectangles est p.

En effet; les côtés du second rectangle deviennent $a-mx$, $b+nx$; la seconde surface devient $ab+x(na-mb)-mnxx$. La somme des deux surfaces est $ab+x(na-mb)$. d'où l'on tire $x=\frac{p-ab}{na-mb}=\frac{ab-p}{mb-na}$.

3me. *Supposition*. Soit $p=o$ ou que la surface demeure la même, on a $x=\frac{ab}{na-mb}$;

$mx+a=\frac{naa}{na-mb}$; $nx-b=\frac{mbb}{na-mb}$; en faisant évanouir p dans les formules des deux premières suppositions.

3°. Soit a et b l'une et l'autre une diminution.

Côtés du second rectangle $mx-a$, $nx-b$.
Surface . . . . $mnxx-x(na+mb)+ab$.
Diminution . . . . . $x(na+mb)-ab$.

Partant, $x=\frac{p+ab}{na+mb}$;

$$mx-a=\frac{mp-naa}{na+mb};\ nx-b=\frac{np-mbb}{na+mb}.$$

Rem. Pour que les côtés du second rectangle soient l'un et l'autre positifs, on doit avoir les deux inégalités $\begin{matrix} mp > naa \\ np > mbb \end{matrix}$; et alors, la question est résolue dans le sens propre de l'énoncé.

Si on a en même tems les inégalités $\begin{matrix} mp < naa \\ np < mbb \end{matrix}$, les équations $\begin{matrix} mx-a=\frac{mp-naa}{na+mb} \\ nx-b=\frac{np-mbb}{na+mb} \end{matrix}$; doivent se présenter sous la forme $\begin{matrix} a-mx=\frac{naa-mp}{na+mb} \\ b-nx=\frac{mbb-np}{na+mb} \end{matrix}$; et alors, on résout la question suivante : si des quantités a et b on ôte les côtés du premier rectangle, la surface du second rectangle, est moindre que la surface du premier de la quantité p.

En effet, l'expression de la seconde surface $mnxx-nax-mbx+ab$ étant proposée, si on la traite comme ignorant son origine, on n'est pas plus en droit de prononcer qu'elle provient du produit des deux facteurs $mx-a$, $nx-b$, qu'on ne l'est de la regarder comme provenant des deux facteurs $a-mx$, $b-nx$. La nature des formules auxquelles on parvient, apprend laquelle de ces deux origines on doit admettre, ou quelle est celle de ces deux questions, intimement liées l'une avec l'autre, dont on obtient la solution.

Dans la seconde question, la surface du second rectangle peut être plus grande que la première, ou égale à elle. Dans le cas de l'augmentation, on a $ab-x(na+mb)=p$; et $x=\frac{ab-p}{na+mb}$; et lorsque $p=o$, $x=\frac{ab}{na+mb}$.

Enfin, qu'on ait en même tems les inégalités $\begin{matrix} mp>naa \\ np<mbb \end{matrix}$ ou $\begin{matrix} mp<naa \\ np>mbb \end{matrix}$; une des valeurs des seconds côtés devient négative, et on résout la question suivante : d'un des côtés du premier rectangle on ôte une des quantités données, de l'autre quantité donnée on ôte l'autre côté du premier rectangle, et la somme des deux surfaces est p.

En

En effet,

$$\left.\begin{array}{r}(mx-a)\ (b-nx)\\ \text{ou}\ (a-mx)\ (nx-b)\end{array}\right\} = x\,(na+mb)-ab-mnxx\,;$$

somme $x(na+mb)-ab=p$.

$$x=\frac{p+ab}{mb+na}.$$

$$mx-a=\frac{mp-naa}{na+mb};\ a-mx=\frac{naa-mp}{na+mb}.$$

$$b-nx=\frac{mbb-np}{na+mb};\ nx-b=\frac{np-mbb}{na+mb}.$$

$$(a-mx)(nx-b)=(mx-a)(b-nx)$$

$$=\frac{p(nnaa+mmbb)-mnpp-mnaabb}{(na+mb)^2}.$$

$$mnxx=\left.\begin{array}{r}(mx-a)\,(b-nx)\\ \text{ou}\ (a-mx)\,(nx-b)\end{array}\right\}=\frac{p(na+mb)^2}{(na+mb)^2}=p.$$

Autre exerc. Il y a un parallèlipipède rectangle dont les trois arêtes sont entr'elles comme les trois nombres, m, n, r. Si ces arêtes subissent des changemens donnés a, b, c, par additions ou par soustractions ; sa surface totale sera altérée (par augmen-

tation ou par diminution) de la quantité donnée $2p$.

Il y a un cylindre dont la hauteur est au rayon de la base comme m est à n; si on altère ces dimensions (par addition ou par soustraction) de quantités données a et b; la surface totale sera altérée d'une quantité donnée, exprimée par un cercle dont le rayon est r.

CHAPITRE III.

Problèmes du premier degré à deux et à plusieurs Inconnues.

DANS les chapitres précédens, nous nous sommes restreints à n'introduire qu'un seul caractère pour désigner les quantités inconnues ; et ayant représenté l'une d'elles par ce caractère, nous avons déterminé les autres quantités inconnues dans la première et dans les quantités connues, en profitant des conditions énoncées dans l'état de la question. Mais, il arrive souvent que le procédé de la solution devient plus simple et plus abrégé, en introduisant un plus grand nombre de caractères pour désigner les quantités inconnues, et dans les questions compliquées cette introduction devient souvent nécessaire.

Quand on n'emploie dans la dénomination qu'une seule inconnue, la condition proprement dite ne renferme qu'une équation.

Quand on emploie un plus grand nombre

d'inconnues, on doit avoir dans la condition autant d'équations indépendantes les unes des autres qu'on a introduit de caractères inconnus. Le but qu'on se propose en traitant ces équations, est de diminuer successivement d'une unité le nombre des inconnues et le nombre des équations; jusqu'à ce qu'on parvienne à une seule équation et à une seule inconnue.

Je vais introduire à la marche générale qu'on doit suivre pour parvenir à ce but, par quelques-uns des exemples qui ont été résolus dans les chapitres précédens.

§ 35. *Problème.* Trouver deux nombres dont on connoît la somme s, et la différence d, (v. §§ 6 et 27).

Dén. Que les deux nombres cherchés soient x et y.

Cond. $\begin{cases} x+y=s \\ x-y=d. \end{cases}$

Comme dans ces deux équations les coefficiens de x sont égaux, et les signes de x semblables; on obtiendra une équation qui ne contiendra plus de x, mais seulement des y, si des membres de la première équation on retranche les membres de la seconde, on obtient $2y=s-d$.

De même, dans ces deux équations, les coefficiens de y sont les mêmes, mais les signes différens ; on chassera les y, et on obtiendra une équation qui ne renfermera que les x, si aux membres de la première équation on ajoute les membres de la seconde. On obtient $2x=s+d$.

On aura comme dans le § 27
$$x=\tfrac{1}{2}s+\tfrac{1}{2}d.$$
$$y=\tfrac{1}{2}s-\tfrac{1}{2}d.$$

§ 36. *Probl.* Trouver deux nombres dont on connoît la somme ou la différence a, et la somme ou la différence p de leurs produits par des nombres donnés m et n.

Dén. Nombres cherchés . . x et y.

1°. Soient a et p deux sommes.

Cond. $\begin{cases} x+y=a \\ mx+ny=p. \end{cases}$

Les coefficiens de x et ceux de y sont différens dans les deux équations ; mais en multipliant les membres de la première équation par le coefficient d'une des inconnues dans la seconde équation, on rend égaux les coefficiens de cette inconnue dans les deux équations ; et partant, en prenant les différences des membres de la première équation ainsi

changés, et des membres correspondans de la seconde, on chasse cette inconnue, et on obtient une équation qui ne renferme plus que la seconde inconnue.

On obtient donc :

$$\begin{aligned} mx+my &= ma \\ mx+ny &= p. \end{aligned}$$

$$\text{ou}\ \begin{aligned} my-ny &= ma-p \\ ny-my &= p-ma \end{aligned}\ \text{suivant que}\ m \gtrless n.$$

De même, en multipliant par n les membres de la première équation ; on rend égaux les coefficiens de y dans les deux équations :

$$\begin{aligned} nx+ny &= na \\ mx+ny &= p. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} mx-nx &= p-na \\ nx-mx &= na-p \end{aligned}\ \text{suivant que}\ m \gtrless n.$$

De là :

$$x=\frac{p-na}{m-n}=\frac{na-p}{n-m}$$

$$y=\frac{ma-p}{m-n}=\frac{p-ma}{n-m}.$$

$$x+y=\frac{p-na}{m-n}+\frac{ma-p}{m-n}=a.\quad \frac{m-n}{m-n}=a.$$

$$mx+ny=\frac{mp-mna}{m-n}+\frac{mna-np}{m-n}=p.\quad \frac{m-n}{m-n}=p.$$

2°. Soit a une somme et p une différence.

$$\text{Cond.} \begin{cases} x+y=a. \\ mx-ny=p. \end{cases}$$

Ayant rendu égaux les coefficiens de x et de y, comme les signes de y sont différens dans les deux équations on procédera par addition pour obtenir x et chasser y.

On obtient :

$$\begin{array}{ll} mx+my=ma & nx+ny=na. \\ mx-ny=p. & mx-ny=p. \\ \hline my+ny=ma-p. & mx+nx=p+na. \\ y=\frac{ma-p}{m+n}. & x=\frac{na+p}{m+n}. \end{array}$$

$$x+y=\frac{na+p}{m+n}+\frac{ma-p}{m+n}=a\times\frac{m+n}{m+n}=a.$$

$$mx-ny=\frac{mna+mp}{m+n}-\frac{mna-np}{m+n}=p\frac{m+n}{m+n}=p.$$

3°. Soit a une différence et p une somme.

$$\text{Cond.} \begin{cases} x-y=a. \\ mx+ny=p. \end{cases}$$

Le procédé est le même que pour le 2°. On obtient :

$$\begin{array}{ll} mx-my=ma & nx-ny=na \\ mx+ny=p. & mx+ny=p. \\ \hline y(m+n)=p-ma & x(m+n)=p+na. \end{array}$$

4°. Soit a et p deux différences. On obtient les deux cas.

$$x - y = a \qquad x - y = a$$
$$mx - ny = p. \qquad -mx + ny = p.$$

Dans le premier cas, comme les signes de chaque inconnue dans les deux équations sont les mêmes, on procédera par soustraction pour obtenir chaque inconnue, après avoir rendu égaux les coefficiens de celle qu'on veut chasser.

Dans le second cas, comme les signes de chaque inconnue dans les deux équations sont différens, on procédera par addition pour obtenir chacune d'elles. On a donc :

1er. Cas. $mx - my = ma, \quad nx - ny = na.$
$mx - ny = p \quad mx - ny = p.$

$$y(m - n) = p - ma. \qquad x(m - n) = p - na.$$
ou $y(n - m) = ma - p. \qquad x(n - m) = na - p.$

$$y = \frac{ma - p}{n - m} \qquad x = \frac{na - p}{n - m}.$$

2d. Cas. $mx - my = ma. \quad nx - ny = na$
$-mx + ny = p. \quad -mx + ny = p.$

$$y(n - m) = p + ma; \quad x(n - m) = p + na.$$

$$y = \frac{ma + p}{n - m}. \qquad x = \frac{na + p}{n - m}.$$

Rem. Comme les deux équations du premier et du second cas $\begin{matrix} mx - ny = p \\ -mx + ny = p \end{matrix}$, ne diffèrent que par les signes de leurs premiers membres, en sorte que l'équation du second cas peut se présenter sous la forme $mx - ny = -p$; les valeurs de x et de y, relatives au second cas, ne diffèrent de leurs valeurs relatives au premier cas que par le signe de p.

§ 37. Dans les exemples que je viens de développer, les coefficiens des inconnues, au moins dans une des équations, sont égaux à l'unité; d'où il suit qu'on rend égaux les coefficiens d'une des inconnues dans chaque équation, en multipliant les membres de cette équation par le coefficient dans l'autre équation de l'inconnue qu'on veut chasser. Ce cas particulier peut, par sa simplicité, servir d'introduction au développement du cas général.

Soient donc deux équations, l'une et l'autre à deux inconnues, et dans lesquelles les coefficiens d'une même inconnue sont inégaux. Pour les rendre égaux soient multipliés les membres de chaque équation, par le coefficient dans l'autre équation de l'inconnue qu'on veut chasser. Les coefficiens de cette inconnue

dans les deux équations deviendront égaux, et on chassera cette inconnue par la soustraction ou par l'addition des membres correspondans des deux équations.

Pour faciliter la traduction des formules qu'on obtiendra, soient désignés par a et a' les coefficiens d'une des inconnues dans les deux équations, et par b et b', les coefficiens de l'autre inconnue; soient p et p' les seconds membres de ces équations.

$$\textit{Cond.}\left\{\begin{array}{l} ax+by=p. \\ a'x+b'y=p'. \end{array}\right.$$

Pour chasser x soient multipliés les deux membres de la première équation par a', et les deux membres de la seconde par a. Pour chasser y soient multipliés les membres de ces deux équations par b' et par b respectivement.

$$\textit{Réd.}\quad \begin{array}{ll} aa'x+a'by & = a'p \\ aa'x+ab'y & = ap' \\ \hline y(ab'-a'b) & = ap'-a'p. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} ab'x+bb'y & = b'p \\ a'bx+bb'y & = bp'. \\ \hline x(ab'-a'b) & = b'p-bp'. \end{array}$$

Sol. $x=\frac{b'p-bp'}{ab'-a'b}$; $y=\frac{ap'-a'p}{ab'-a'b}$.

$$ax=\frac{ab'p-abp'}{ab'-a'b}$$
$$by=\frac{abp'-a'bp}{ab'-a'b}.$$
$$ax+by=p\times\frac{ab'-a'b}{ab'-a'b}=p.$$

$$a'x=\frac{a'b'p-a'bp'}{ab'-a'b}.$$
$$b'y=\frac{ab'p-a'b'p}{ab'-a'b}.$$
$$a'x+b'y=p'\times\frac{ab'-a'b}{ab'-a'b}=p'.$$

Rem. 1re. Le problème est indéterminé, si on a en même temps $ab'=a'b$; et $ap'=a'p$, ou $bp'=b'p$.

En effet, soit $ab'=a'b$; ou $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$; si $a'=ma$, $b'=mb$; on a donc; $\begin{matrix} ax+by=p \\ max+mby=p' \end{matrix}$; et puisque le premier membre de la seconde équation vaut m fois le premier membre de la première, aussi le second membre de la seconde équation doit valoir m fois le second membre de la première; on doit donc avoir $p'=mp$; mais, $m=\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$; donc, $p'=\frac{a'}{a}p=\frac{b'}{b}p$; ou $\begin{matrix} ap'=a'p \\ bp'=b'p \end{matrix}$.

Rem. 2[de]. Quoique les premiers membres des équations précédentes aient été regardés comme étant les sommes de leurs termes, les formules trouvées renferment aussi les valeurs des inconnues, lorsque l'un des premiers membres ou l'un et l'autre, sont les différences de leurs termes. Pour cela, il suffit de changer dans les formules les signes des termes dont les signes ont changé dans les équations.

Soient les équations. On a :

$$\begin{aligned} ax-by&=p \\ a'x+b'y&=p' \end{aligned} \quad x=\frac{b'p+bp'}{ab'+a'b};\ y=\frac{ap'-a'p}{ab'+a'b}.$$

$$\begin{aligned} ax-by&=p \\ a'x-b'y&=p'. \end{aligned} \quad x=\frac{-b'p+bp'}{-ab'+a'b};\ y=\frac{ap'-a'p}{ab'+a'b};$$

$$\begin{aligned} ax-by&=p \\ -a'x+b'y&=p'. \end{aligned} \quad x=\frac{b'p+bp'}{ab'-a'b};\ y=\frac{ap'+a'p}{ab'-a'b}.$$

Remarque. 3[me]. Les formules $x=\frac{b'p-bp'}{ab'-a'b}$ $y=\frac{ap'-a'p}{ab'-a'b}$; peuvent se traduire comme il suit, de manière à soulager la mémoire.

Chaque inconnue est exprimée par une fraction, dont le dénominateur est la différence des produits en croix des coefficiens

des deux inconnues (savoir, du produit des coefficiens de l'une des inconnues dans une des équations par le coefficient de l'autre dans l'autre équation; et du produit du coefficient de la première inconnue dans la seconde équation, par le coefficient de la seconde dans la première équation); et le numérateur se forme du dénominateur, en substituant les seconds membres des équations aux coefficiens de l'inconnue cherchée, pris dans les mêmes équations.

Cette règle, immédiatement applicable aux formules du premier cas, $\begin{matrix} ax+by=p \\ a'x+b'y=p' \end{matrix}$; ne doit être appliquée qu'avec précaution aux autres cas, quant aux signes des termes du numérateur; les changemens de signes des termes du numérateur dépendant seulement des changemens de signes des coefficiens des inconnues.

Applications à des exemples particuliers. Trois mesures de froment et cinq mesures de seigle, ont coûté 104 francs; *item*, quatre mesures de froment, et sept mesures de seigle ont coûté 142 francs. On demande les prix de chaque mesure de froment et de chaque mesure de seigle.

Ici, $a=3 \quad b=5 \quad p=164$
$a'=4 \quad b'=7 \quad p'=142.$

$ab'=21$
$a'b=20$ $\quad ab'-a'b=1.$

$b'p=728$
$bp'=710$ $\quad b'p-bp'=18.$

$\frac{b'p-bp'}{ab'-a'b}=18.$ prix du froment.

$ap'=426$
$a'p=416$ $\quad ap'-a'p=10;$

$\frac{ap'-a'p}{ab'-a'b}=10;$ prix du seigle.

On emploie pour un certain ouvrage des ouvriers, en partie hommes et en partie femmes. Cinq hommes et quatre femmes ont reçu ensemble 256 sols; et l'excès de la paie de 7 hommes sur celle de six femmes, est de 80 sols. On demande les paies particulières de chaque homme et de chaque femme.

Un ouvrier ayant travaillé 12 jours, pendant lesquels il ne dépensoit rien, et étant resté oisif pendant 5 jours (chacun desquels il faisoit une même dépense pour sa nourriture), a économisé pendant ces 17 jours

261 sols. Sur le même pied, 16 jours de travail et 7 jours d'oisiveté lui ont produit 343 sols. On demande quel étoit son salaire pour chaque jour de travail et sa dépense pour chaque jour d'oisiveté.

Quelqu'un possède 10000 francs, qu'il fait valoir à un certain intérêt, et il doit 8000 fr. dont il paie un certain intérêt. La différence des intérêts de ces deux sommes (l'excès de l'intérêt de la première sur celui de la seconde) est de 200 francs. Une autre personne fait valoir 15000 fr. au second intérêt, elle paie l'intérêt de 9000 fr. au premier taux, et elle retire de plus qu'elle ne paie d'intérêt 260 fr. On demande quels sont les deux taux d'intérêt.

§ 38. Le procédé par lequel on rend égaux les coefficiens d'une des inconnues dans deux équations, a une grande affinité avec le procédé par lequel on réduit deux fractions au même dénominateur; aussi est-il susceptible des mêmes abréviations dont ce dernier est susceptible.

Si les coefficiens de l'inconnue qu'on veut chasser dans les deux équations ont un diviseur commun : on simplifie l'opération par

laquelle on rend égaux les coefficiens de cette inconnue dans les deux équations, en multipliant les deux membres d'une des équations par le quotient qu'on obtient en divisant le coefficient de cette inconnue dans l'autre équation, par ce diviseur commun; au lieu de les multiplier par ce coefficient entier.

Exemp. Le troisième exemple que je viens d'énoncer donne lieu aux deux équations $\begin{matrix} 12x-5y=261 \\ 16x-7y=343 \end{matrix}$. Les coefficiens 12 et 16 de x, ont pour diviseur commun 4; divisant ces deux coefficiens par 4, on obtient pour quotiens 3 et 4: soient multipliés les deux membres de la première équation par 4, et les deux membres de la seconde équation par 3;

on obtient $\begin{matrix} 48x-20y=1044 \\ 48x-21y=1029 \end{matrix}$

de là . . . . . . $y=15$.

Le procédé que j'ai développé pour résoudre les équations à deux inconnues me paroît le plus commode à employer. Cependant, on peut aussi en employer d'autres qui doivent conduire au même résultat.

1[er]. *Procédé.* Soient prises les valeurs d'une des inconnues dans les deux équations, dans les

les membres connus, et dans l'autre inconnue; et soient égalées ces deux valeurs de cette première inconnue, on aura une autre équation qui ne renfermera que cette seconde inconnue.

Soit $ax+by=p$ $\quad ax=p-by$;
$a'x+b'y=p'$ $\quad a'x=p'-b'y$;

$$x=\frac{p-by}{a}$$

$$x=\frac{p'-b'y}{a'}$$ de là; $\frac{p-by}{a}=\frac{p'-b'y}{a'}$.

$$a'p-a'by=ap'-ab'y;$$

$$y(ab'-a'b)=ap'-a'p;\ y=\frac{ap'-a'p}{ab'-a'b}.$$

$$ax=p-by=\frac{ab'p-abp'}{ab'-a'b};\ x=\frac{b'p-bp'}{ab'-a'b}.$$

2^d^. *Procédé.* Soit prise la valeur d'une des inconnues dans une des équations, exprimée dans le membre connu et dans l'autre inconnue; et soit substituée cette valeur dans l'autre équation : on aura encore une équation à une seule inconnue.

Soit $ax+by=p$ $\quad x=\frac{p-by}{a}$;
$a'x+b'y=p'$

$$a'x=\frac{a'p-a'by}{a};\ a'x+b'y=\frac{a'p-a'by+ab'y}{a}=p'.$$

$$y=\frac{ap'-a'p}{ab'-a'b},$$ comme précédemment.

Ex. Une personne possède un certain capital qu'elle fait valoir à un certain intérêt. Une autre personne qui possède 10000 fr. de plus que la première, et qui fait valoir son bien de $1\frac{0}{0}$ plus avantageusement qu'elle, a un revenu plus grand de 800 fr. Une troisième personne, qui possède 15000 fr. de plus que la première, et qui fait valoir son bien de $2\frac{0}{0}$ plus avantageusement qu'elle, a un revenu plus grand de 1500 fr.

On demande les biens de chacune de ces trois personnes, et les taux d'intérêts auxquels elles les font valoir.

Une personne achète un certain nombre d'aunes d'étoffe, à un certain prix qu'on ignore. Si elle achète cinq aunes de plus, d'une étoffe qui coûte trois francs de moins, elle paiera le même prix; mais si elle achète six aunes de plus d'une étoffe qui coûte quatre francs de moins, elle paiera dix-huit francs de moins. On demande les nombres d'aunes et les prix de chaque espèce d'étoffe.

On emploie un certain nombre d'ouvriers qui font chacun par jour un certain nombre de toises d'un ouvrage dont ils sont chargés. Si on emploie six ouvriers de plus, faisant chacun par jour une toise de plus, le travail journalier sera augmenté de 78 toises. Si on emploie deux ouvriers de moins, faisant chacun par jour une toise de moins que les premiers, le travail journalier sera diminué de 50 toises. On demande les nombres d'ouvriers, et les travaux journaliers de chacun d'eux.

On imprime un Ouvrage sur un certain format; si on met à une page trois lignes de plus, et à chaque ligne quatre lettres de plus, chaque page contiendra 228 lettres de plus; mais si on met à une page deux lignes de moins, et à chaque ligne trois lettres de moins, chaque page contiendra 147 lettres de moins. On demande les nombres des lignes de chaque page, et les nombres des lettres de chaque ligne.

Il y a un rectangle dont on ignore les dimensions. Si on altère ses côtés (par addition ou par soustraction) des quantités a et b, sa surface sera altérée de la quantité p. Si on altère de même ses côtés des quantités a' et b', sa

surface sera altérée de la quantité p'. On demande les dimensions de ce rectangle.

Il y a un parallelipipède à base quarrée dont on ignore les dimensions. Si on altère le côté de sa base d'une quantité donnée a; et si on altère sa hauteur d'une quantité donnée b, sa surface totale sera altérée de la quantité p. Si on altère le côté de sa base d'une autre quantité donnée a', et si on altère sa hauteur d'une autre quantité donnée b', sa surface totale sera altérée de la quantité donnée p'.

Item : pour un cylindre droit.

§ 40. Le procédé par lequel on a réduit les problèmes à deux inconnues et à deux équations, aux problèmes à une seule équation à une inconnue, sert à résoudre les problèmes à trois inconnues et à trois équations.

Soient les 3 équations

$$ax+by+cz=p.$$
$$a'x+b'y+c'z=p'.$$
$$a''x+b''y+c''z=p''.$$

Dans deux de ces équations, par exemple, les deux premières, soient exprimées les valeurs de x et de y dans les membres connus et dans l'inconnue restante, on aura les deux

équations $\begin{aligned} ax+by &= p-cz. \\ a'x+b'y &= p'-c'z. \end{aligned}$

De ces deux équations on obtient (§ 37),

$$x=\frac{(p-cz)b'-(p'-c'z)b}{ab'-a'b}=\frac{pb'-p'b-z(cb'-c'b)}{ab'-a'b}.$$

$$y=\frac{a(p'-c'z)-a'(p-cz)}{ab'-a'b}=\frac{ap'-a'p-z(ac'-a'c)}{ab'-a'b}.$$

Dans la troisième équation, soient substituées ces valeurs de x et de y : on obtient l'équation

$$a''.\frac{pb'-p'b-z(cb'-c'b)}{ab'-a'b)}+b''.\frac{ap'-a'p-z(ac'-a'c)}{ab'-a'b}+c''z=p''.$$

ou,

$$a''(pb'-p'b)-a''z(cb'-c'b)+b''(ap'-a'p)-b''z(ac'-a'c)=p''(ab'-a'b)+c''z(ab'-a'b)$$

de là : $z\left\{\begin{array}{l} ab'c''+a'b''c+a''bc' \\ -ab''c'-a'bc''-a''b'c \end{array}\right\} = \begin{array}{l} ab'p''+a'b''p+a''bp' \\ -ab''p'-a'bp''-a''b'p \end{array}$

$$z=\frac{ab'p''-ab''p'+a'b''p-a'bp''+a''bp'-a''b'p}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$$

$$y=\frac{ap'c''-ap''c'+a'p''c-a'pc''+a''pc'-a''p'c}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$$

$$x=\frac{pb'c''-pb''c'+p'b''c-p'bc''+p''bc'-p''b'c}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}.$$

Rem. Quoique ces formules soient composées de plusieurs termes, la symétrie de leur composition rend facile leur traduction, et soulage la mémoire.

Le dénominateur est composé de six produits, chacun de trois facteurs, ou de trois dimensions, qui sont des coefficiens de chacune des trois inconnues tirés de chacune des trois équations. Trois de ces produits sont additifs, et trois sont soustractifs. Ces deux classes de produits se distinguent comme il suit. Dans chacun de ces produits soit conservé le même ordre des coefficiens des trois inconnues; soient affectés à ces coefficiens les indices 0, 1, 2, ceux de ces produits dans lesquels ces indices se suivent dans cet ordre en commençant par l'un quelconque d'entr'eux, sont positifs; et ceux dans lesquels cet ordre est troublé, sont négatifs. Ainsi, les produits dans lesquels les indices des lettres *a*, *b*, *c*, sont

0, 1, 2,
1, 2, 0, sont positifs; et les produits dans
2, 0, 1,
lesquels les indices des mêmes lettres sont
0, 2, 1,
1, 0, 2, sont négatifs.
2, 1, 0,

Le numérateur se forme du dénominateur, en substituant dans chaque terme au coefficient de l'inconnue cherchée le second membre correspondant ou tiré de la même équation.

Cette règle, quant aux signes, subit soit dans le dénominateur, soit dans le numérateur, les changemens correspondans aux changemens de signes de chaque coefficient ou de chaque facteur.

§ 41. Le procédé que je viens d'exposer pour résoudre les équations à trois inconnues, me paroît conduire de la manière la plus prompte aux formules symétriques par lesquelles les inconnues ont été exprimées. On auroit pu suivre d'autres procédés pour y parvenir. Par exemple, au lieu de réduire immédiatement la question à une seule équation à une seule inconnue, on auroit pu la réduire à deux équations chacune à deux inconnues en égalant les coefficiens d'une des inconnues dans les trois équations.

Soit donc,
$$\begin{aligned} ax+by+cz&=p \\ a'x+b'y+c'z&=p' \\ a''x+b''y+c''z&=p''. \end{aligned}$$

Soient multipliés les membres de la première équation, par exemple, par c', et ceux

de la seconde par c; et soit chassé z des deux équations obtenues. De même, soient multipliés les membres de la première équation par c'', et les membres de la troisième équation par c; et soit chassé z des deux équations obtenues : on aura deux équations renfermant chacune les deux inconnues x et y seulement; lesquelles seront

$$x(ac'-a'c)+y(bc'-b'c)=pc'-p'c.$$
$$x(ac''-a''c)+y(bc''-b''c)=pc''-p''c.$$

De là : $x=\frac{(pc'-p'c)(bc''-b''c)-(bc'-b'c)(pc''-p''c)}{(ac'-a'c)(bc''-b''c)-(bc'-b'c)(ac''-a''c)}$.

Or : $(ac'-a'c)(bc''-b''c)$

$=abc'c''-ab''cc'-a'bcc''+a'b''cc$

et $(bc'-b'c)(ac''-a''c)$

$=abc'c''-ab'cc''-a''bcc'+a''b'cc.$

Donc, $(ac'-a'c)(bc''-b''c)-(bc'-b'c)(ac''-a''c)$
$=c(ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c)$

de même; $(pc'-p'c)(bc''-b''c)-(bc'-b'c)(pc''-p''c)$
$=c(pb'c''-pb''c'+p'b''c-p'bc''+p''bc'-p''b'c)$

donc, $x=\frac{pb'c''-pb''c'+p'b''c-p'bc''+p''bc'-p''b'c}{ab'c''-ab''c'+a'b''c-a'bc''+a''bc'-a''b'c}$.

Ce procédé me paroît avoir l'inconvénient (dont j'ai cherché en vain à le dégager) d'introduire des quantités qui se détruisent

mutuellement, savoir, deux produits $abc'c''$; et des produits de quatre dimensions, qui ne se réduisent à des produits de trois dimensions, que par l'expulsion d'un facteur commun c, introduit inutilement dans les deux termes de la fraction qui exprime la valeur de l'inconnue.

On pourroit suivre d'autres procédés pour parvenir au même but; mais le premier què j'ai développé me paroît le plus simple et le plus régulier.

Le dénominateur de la fraction qui exprime la valeur de chaque inconnue, étant composé de termes précédés de signes opposés, chaque inconnue peut devenir ou indéterminée ou impossible, lorsque la somme des termes précédés d'un des signes est égale à la somme des autres. Et la valeur de chaque inconnue change de signe, lorsque les deux termes de la fraction qui l'exprime ont des signes différens. Je ne m'arrête pas à l'énumération de tous les cas qui peuvent se présenter; les observations déjà souvent répétées, que j'ai faites sur des exemples moins composés, suffisent pour faire comprendre le véritable sens de ces changemens.

Exemples de questions à trois inconnues.

Cinq mesures de froment, quatre de seigle, et trois d'avoine, ont coûté . . . 147 fr.

Huit mesures de froment, six mesures de seigle, et cinq mesures d'avoine, ont coûté . . . . 232 fr.

Neuf mesures de froment, sept mesures de seigle, et six mesures d'avoine ont coûté . . . . 267 fr.

On demande le prix d'une mesure de chacune de ces graines.

Sept hommes et huit femmes ont dépensé . . . . 164 fr.

Huit hommes et cinq enfans, ont dépensé . . . . 136 fr.

Neuf femmes et sept enfans, ont dépensé . . . . 146 fr.

On demande la dépense de chaque homme, de chaque femme, et de chaque enfant.

On ignore les dimensions d'un parallélipipède rectangle.

Si sa longueur, sa largeur et sa hauteur sont augmentées de 3, 2, 1 pieds respectivement, sa surface totale sera augmentée de 504 pieds quarrés.

Si sa longueur est augmentée de 4 pieds, et sa largeur diminuée de 3 pieds; la surface d'une de ses bases sera diminuée de 12 pieds quarrés.

Si sa longueur est augmentée de 5 pieds, si sa largeur est diminuée de 4 pieds, et si sa hauteur est augmentée de 2 pieds, sa surface latérale sera augmentée de 134 pieds quarrés.

§. 42. La marche qu'on a suivie pour appliquer les formules relatives à deux équations à deux inconnues, à la solution de trois équations à trois inconnues, s'applique avec le même succès à la solution de quatre équations à quatre inconnues, comme il suit.

Dans trois des équations données, soient exprimées trois des inconnues dans les seconds membres de ces équations et dans la quatrième inconnue; et dans l'équation restante, soient substituées les valeurs trouvées des trois premières inconnues. On obtiendra une équation, à une seule inconnue. On profitera, de même, des formules relatives à quatre équations et quatre inconnues pour résoudre le cas de cinq équations et de cinq inconnues; et on passera ainsi successivement, d'un certain nombre d'équations

et du même nombre d'inconnues, à un nombre d'équations et d'inconnues supérieur d'une unité. Je me contente de cette esquisse de la marche à suivre dans cette recherche, soit, parce que la composition des formules auxquelles on parvient, leur donne un air de complication qui pourroit effrayer ceux qui ne sont pas encore suffisamment versés dans le calcul; soit, parce que la nature de cette composition ne peut bien être saisie qu'en admettant les principes de la doctrine des combinaisons (1); soit enfin, parce que les cas où l'on est appelé à traiter un grand nombre d'équations à plusieurs inconnues, se présentent rarement, et que les cas particuliers qui peuvent se présenter, se développent ordinairement d'une manière plus abrégée que par l'application des formules générales.

Ex. Trouver quatre quantités x, y, z, v, d'après les quatre conditions suivantes :

$$\begin{aligned} ax+by &= p \\ b'y+c'z &= p' \\ c''z+d''v &= p'' \\ a'''x \qquad\qquad +d'''v &= p'''. \end{aligned}$$

---

(1) Voy. Cramer, *Introduction à l'Analyse des lignes courbes.*

Des deux premières équations soit chassée y, on obtient

$ab'x - bc'z \quad = b'p - bp'$ De cette éq. et de l'équat. $c''z + d''v = p''$, soit chassé z: on obtient

$ab'c''x + bc'd''v = b'c''p - bc''p' + bc'p''$; de là, et de l'équation $a'''x + d'''v = p'''$: on obtient

$$x = \frac{b'c''d'''p - bc''d'''p' + bc'd'''p'' - bc'd''p'''}{ab'c''d''' - a'''bc'd''}.$$

Il arrive quelquefois que l'introduction d'une nouvelle inconnue facilite la solution d'une question.

Ex. On demande les biens de trois personnes A, B, C, en sachant que la somme du bien de A et de m fois la somme des biens de B et de C, fait p; que le bien de B et de n fois la somme des biens de A et de C, fait q; et que le bien de C joint à l fois la somme des biens de A et de B, fait r.

Soient appelés les biens de A, B, C, x, y, z, respectivement : soit introduite l'inconnue s pour exprimer la somme des trois biens. On aura les trois équations suivantes :

$$x+m(s-x)=p \quad \text{ou} \quad ms-(m-1)x=p$$
$$y+n(s-y)=q \qquad ns-(n-1)y=q$$
$$z+l(s-z)=r \qquad ls-(l-1)z=r.$$

Soient rendus égaux les coefficiens de x, y, z; en multipliant les membres de la première équation par $(n-1)(l-1)$; ceux de la seconde, par $(m-1)(l-1)$; et ceux de la troisième par $(m-1)(n-1)$; et soient ajoutés les premiers membres de ces trois équations, et leurs seconds membres, on aura:

$$s\left\{\begin{array}{l} m(n-1)(l-1) \\ +n(m-1)(l-1)-(m-1)(n-1)(l-1) \\ +l(m-1)(n-1) \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} \quad p(n-1)\ (l-1) \\ =+q(m-1)\ (l-1) \\ \quad +r(m-1)\ (n-1). \end{array}$$

D'où l'on obtient:

$$s=\frac{p(n-1)(l-1)+q(m-1)(l-1)+r(m-1)(n-1)}{2mnl-(mn+ml+nl)+1}.$$

CHAPITRE IV.

Sur les Rapports et les Proportions géométriques.

§ 43. QUOIQUE les principes de la doctrine des proportions aient été développés dans l'arithmétique, je crois devoir les répéter ici, sous un point de vue général, eu égard à leur importance, et à la fécondité de leurs applications.

On dit qu'on s'occupe du rapport géométrique (ou par quotient) de deux quantités, lorsqu'on cherche combien de fois l'une contient l'autre : le dividende est appelé l'*Antécédent* du rapport ; le diviseur est appelé le *Conséquent*; et le résultat de la comparaison ou le quotient, est appelé *Exposant* du rapport.

On indique le rapport de la même manière que la division, soit en séparant par deux points l'antécédent du conséquent ; soit en indiquant l'exposant par une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont l'antécédent et le conséquent respectivement. Ainsi, les deux termes du rapport étant a et b, l'ex-

posant de ce rapport, ou le rapport lui-même est indiqué comme il suit, ou par $a : b$; ou par $\frac{a}{b}$.

On dit, que deux rapports sont égaux lorsqu'ils ont le même exposant.

De même qu'on peut multiplier ou diviser les deux termes d'une fraction, ou les deux termes d'une division par un même nombre, sans changer la valeur de la fraction ou sans changer le quotient; on peut aussi multiplier ou diviser les deux termes d'un rapport par un même nombre sans changer l'exposant ou le rapport. Ainsi, le rapport de ma à mb est le même que le rapport de a à b, quelle que soit la valeur de m; et réciproquement, tous les rapports égaux à celui de a à b sont tels, que leurs termes valent les termes correspondans de celui-ci le même nombre de fois, en prenant cette expression dans un sens général, qui renferme la division aussi-bien que la multiplication des termes de ce dernier rapport par un même nombre.

L'égalité de deux rapports s'appelle une *proportion géométrique*, ou par *quotient*. Les termes d'un des rapports étant a et b; et les termes d'un autre rapport égal à lui, étant

étant c et d, la proportion composée de ces quatres termes s'indique comme il suit : $a : b = c : d$, en séparant par le signe de l'égalité les deux rapports égaux, et elle se lit : a est à b comme c est à d.

Si, dans une proportion, les conséquens sont égaux entr'eux, les antécédens sont aussi égaux entr'eux ; et réciproquement, si les antécédens sont égaux entr'eux, les conséquens sont aussi égaux entr'eux.

Si deux rapports sont égaux à un même rapport, ils sont égaux entr'eux.

§ 44. *Théorème.* Dans toute proportion géométrique, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. Soit la proportion

$a : b = c : d$; j'affirme que $ad = bc$.

En effet, $a : b = ad : bd$
et $c : d = bc : bd$ (§ 43).
Mais $a : b = c : d$ (hypo).
Donc, $ad : bd = bc : bd$

Mais dans cette proportion les deux conséquens sont égaux : donc aussi, les deux antécédens sont égaux, ou $ad = bc$.

Autr. Puisque $a : b = c : d$,
si $a = mb$, $c = md$,
$ad = d \times mb = mbd$,
$bc = b \times md = mbd$; donc, $ad = bc$.

Réciproquement. Si deux produits sont égaux entr'eux, on peut prendre les termes de l'un pour les extrêmes d'une proportion, et les termes de l'autre pour les moyens. Si $ad=bc$, on a la proportion $a:b=c:d$. En effet, puisque

$$ad=bc;\ ad:bd=bc:bd$$

Mais . . . . $ad:bd=a:b$ (§ 43)
Et . . . . . $bc:bd=c:d$
Donc, . . . $a:b=c:d$.

Autre. Que les deux membres de l'équation $ad=bc$, soient divisés l'un et l'autre par le produit bd, on a $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, ou $a:b=c:d$.

Ces deux théorèmes sont le fondement de la règle de trois, soit directe, soit inverse. Une règle de trois est une proportion dans laquelle trois termes étant donnés on cherche le quatrième.

Si, dans une proportion, les deux conséquens sont constans, les deux antécédens varient ensemble, de manière à devenir les mêmes multiples ou les mêmes aliquotes d'eux-mêmes : ils sont dits proportionels l'un à l'autre.

Si, dans une proportion, les deux extrêmes,

par exemple, sont constans, les deux moyens varient ensemble; de manière, que si l'un devient un certain multiple de lui-même, l'autre devient la même partie aliquote de lui-même : ils sont dits inversement proportionnels l'un à l'autre.

Il suit des deux théorèmes précédens, que, dans une proportion, on peut faire changer de place, ou aux deux termes moyens, ou aux deux termes extrêmes; ou mettre les moyens à la place des extrêmes, et les extrêmes à la place des moyens. Ce qui donne lieu aux changemens que présente le tableau suivant :

$a:b=c:d \quad b:d=a:c \quad c:d=a:b \quad d:c=b:a$

$a:c=b:d \quad b:a=d:c \quad c:a=d:b \quad d:b=c:a$

§ 45. Les deux théorèmes du § précédent sont encore les fondemens des différens changemens qu'on peut faire subir aux termes d'une proportion, en les ajoutant les uns aux autres, ou en les soustrayant les uns des autres.

Soit $a:b=c:d$, on a $a+b:b=c+d:d$. En effet, par ce changement l'exposant de chaque rapport est augmenté d'une unité.

De même, $a-b:b=c-d:d$. En effet, par ce changement, l'exposant de chaque rapport est diminué d'une unité.

Appliquant ces deux changemens à chacune des huit manières dont une proportion composée des mêmes termes peut être présentée, on obtient seize manières de présenter une proportion, en combinant deux paires de termes par addition ou par soustraction.

En particulier, on obtient le changement $a\pm c:b\pm d=a:b=c:d$; savoir : dans toute proportion, la somme ou la différence des antécédens est à la somme ou à la différence des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.

Ce dernier changement, s'applique à une suite quelconque de rapports égaux; savoir : dans une suite de rapports égaux, la somme de tous les antécédens est à la somme de tous les conséquens, comme un antécédent est à son conséquent.

En effet, si un antécédent vaut un nombre quelconque m de fois son conséquent, aussi la somme de tous les antécédens vaut le même nombre de fois la somme de tous les conséquens.

Rem. Ce changement est le fondement de la règle de société.

§ 46. Dans une proportion, si l'un des extrêmes est plus grand que chacun des moyens, l'autre extrême est, au contraire, plus petit que chacun des moyens, et, à plus forte raison, plus petit que le premier extrême; de sorte que les deux extrêmes sont, l'un le plus grand, et l'autre le plus petit des termes de la proportion.

J'affirme que la somme du plus grand et du plus petit des termes d'une proportion, est plus grande que la somme des deux autres.

Dans la proportion $a:b=c:d$, soit $a\begin{matrix}>b\\>c\end{matrix}$,

et partant $d\begin{matrix}<b\\<c\end{matrix}$; j'affirme que $a+d>b+c$.

En effet, puisque $a:b=c:d$,

$$a-b:a=c-d:c.$$

Mais, $a>c$; donc, $a-b>c-d$. Donc, ajoutant à chaque membre $b+d$, $a+d>b+c$.

§ 47. *Th.* Soient deux proportions, et soient multipliés les termes de l'une par les termes correspondans de l'autre : j'affirme que les produits sont en proportion.

Soient les 2 proportions $a : b = c : d$
$a' : b' = c' : d'$.

J'affirme que . . . . $aa' : bb' = cc' : dd'$.

En effet, mettant ces deux proportions sous la forme fractionnaire, on aura :

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, et de là, $\frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} = \frac{c}{d} \times \frac{c'}{d'}$.
$\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$.

ou, $\frac{aa'}{bb'} = \frac{cc'}{dd'}$; et partant $aa' : bb' = cc' : dd'$.

Autr. Si $a = mb$, $c = md$
Si $a' = m'b'$, $c' = m'd'$.

Donc, $aa' = mm'bb'$ $cc' = mm'dd'$;
Donc, $aa' : bb' = mm' : 1 = cc' : dd'$.

En particulier, que les deux proportions soient composées des mêmes termes semblablement disposés. Le produit de deux termes correspondans est le quarré de l'un d'entr'eux; et partant, si quatre nombres forment une proportion, leurs quarrés sont aussi en proportion.

Le théorème précédent, énoncé comme relatif à deux proportions, s'applique aussi à un nombre quelconque de proportions, et se démontre de la même manière; savoir: si on a un

nombre quelconque de proportions, les produits continuels de leurs termes correspondans sont aussi en proportion; et en particulier, si on a une proportion, les puissances d'un même ordre de ses termes sont aussi en proportion.

Ce théorème est particulièrement relatif aux proportions dont tous les termes sont numériques; on peut aussi l'adapter avec quelques légers changemens aux proportions dans lesquelles les termes d'un des rapports sont des quantités quelconques (d'une même espèce).

Définition. Soient deux rapports, tels, que le conséquent de l'un soit l'antécédent de l'autre; le rapport de l'antécédent du premier au conséquent du second est dit *composé* de ces deux rapports.

En général, soit un nombre quelconque de quantités de même espèce, le rapport de la première à la dernière est dit composé de tous les rapports intermédiaires, en prenant chaque quantité intermédiaire alternativement pour conséquent et pour antécédent.

Th. Soient A, B, C, trois quantités de même espèce; et soient a, b, b', c, des quantités numériques.

Soit $A : B = a : b$;
$B : C = b' : c$; j'affirme qu'on a
$A : C = ab' : bc$.

En effet, puisque $A : B = a : b$; $B = A \times \frac{b}{a}$;

Puisque $B : C = b' : c$; $B = C \times \frac{b'}{c}$;

Donc, $A \times \frac{b}{a} = C \times \frac{b'}{c}$;

Donc, $A : C = \frac{b'}{c} : \frac{b}{a} = ab' : bc$.

Soit de nouveau $C : D = c' : d$,
on aura $A : D = ab'c' : bcd$; et ce procédé s'applique à un nombre quelconque de proportions.

Cette proposition est le fondement de la règle conjointe en arithmétique, et en particulier celui des opérations des arbitrages ou changes composés.

Cor. Soient $A : B = A' : B' = a : b$
$B : C = B' : C' = b' : c$
$C : D = C' : D' = c' : d$
$D : E = D' : E' = d' : e$ etc.
On aura, $A : E = A' : E' = ab'c'd' : bcde$.

Partant, les rapports composés de rapports égaux sont égaux.

§ 48. Plusieurs des questions résolues dans les chapitres précédens, et en particulier, dans les deux premiers, peuvent être ramenées à la doctrine des rapports et des proportions.

Ex. Trouver deux nombres dont on connoît la somme ou la différence et le rapport.

Trouver deux nombres dont le rapport est donné, et dont le rapport est encore donné quand on les augmente ou qu'on les diminue de quantités données.

Trouver deux nombres dont on connoît la somme ou la différence, et la somme ou la différence des nombres qui ont à eux des rapports donnés.

Partager deux nombres donnés a et b l'un et l'autre en deux parties, de manière que le rapport d'une partie de a à une partie de b soit donné, et que le rapport des deux autres parties de a et de b soit aussi donné.

Prob. général. Partager les sommes données a, b, c, d, e . . . . . chacune en deux parties, de manière que les rapports d'une partie de a à une partie de b; de l'autre partie de b à une partie de c; de l'autre partie de c à une partie de d; de l'autre partie de d à une partie de e, ... jusqu'au rapport de la seconde partie de la dernière des

sommes données, à la seconde partie de a ou de la première des sommes données, soient tous donnés.

Je vais développer une ou deux de ces questions qui donnent lieu à l'introduction des signes $\frac{1}{0}, \frac{0}{0}$; dans le but d'éclaircir le sens de ces symboles.

Soit d la différence de deux nombres cherchés dont le rapport est donné, égal au rapport de 1 à m.

Pour que cette question soit résoluble lorsque d est en effet une différence, il faut que le rapport donné du plus grand nombre au petit, soit un rapport de plus grande inégalité, et partant, on doit avoir $m>1$.

Dén. Soient x et $x+d$ les nombres cherchés.

Cond. $x : x+d = 1 : m$

Réd. $\frac{x}{x+d} : d = \frac{1}{m} : m-1$.

Sol. $x = d \times \frac{1}{m-1}$; $x+d = d \times \frac{m}{m-1}$.

Quoique ces formules soient dirigées vers la supposition $m>1$, on les applique aussi aux suppositions contraires $m=1$, $m<1$.

1°. La suppositition $m<1$ revient à supposer celle des quantités qu'on avoit prise pour la plus petite comme étant la plus grande, et on auroit dû établir la proportion $x : x-d=1 : m$, de laquelle on auroit tiré

$$\frac{x}{x-d} : d = \frac{1}{m} : 1-m, \quad x=d\times\frac{1}{1-m};$$

$$x-d=d\times\frac{m}{1-m}.$$

Si on ne fait pas ce changement, et si on applique au cas $m<1$ les formules relatives au cas $m>1$, les valeurs de x et de $x+d$ sont exprimées dans des fractions dont le dénominateur est négatif, et qui ne sont admissibles qu'en tant qu'elles sont les mêmes que les fractions $-d\times\frac{1}{1-m}$, $-d\times\frac{m}{1-m}$, dans lesquelles d a changé de signe, ou qui indiquent que x et $x+d$ changent de signe, si on conserve le signe de d.

En effet, en traitant la proportion $x : x+d=1 : m$, dans la supposition $1>m$, on obtient $\frac{x}{x+d} : -d=\frac{1}{m} : 1-m$; qui donne

$$x=-d\times\frac{1}{1-m}; \; x+d=-d\times\frac{m}{1-m}.$$

2°. Dans la supposition $m=1$, la proportion $x:x+d=1:m$, devient $x:x+d=1:1$; qui ne peut avoir lieu que dans le cas où $d=o$, et qui, dans ce cas, a lieu pour une valeur quelconque de x.

Si on applique au cas $m=1$, les formules tirées de la supposition $m>1$, on obtient $x=d\times\frac{1}{o}$, si d n'est pas zéro; et $x=\frac{o}{o}$, si d est zéro. Je vais donner quelques éclaircissemens sur ces expressions.

Lorsque la différence de deux quantités est déterminée ou donnée, l'exposant de leur rapport n'est jamais l'unité. Mais comme leur différence déterminée est d'autant plus petite relativement à chacune d'elles, qu'elles sont plus grandes, leur rapport approche du rapport d'égalité d'autant plus qu'elles sont plus grandes; et l'exposant de leur rapport peut différer de l'unité moins que d'aucune quantité assignée. L'unité est dite la *limite* de cet exposant; limite vers laquelle il s'approche continuellement par l'augmentation des termes du rapport dont la différence est donnée, mais qu'il n'atteint jamais tant qu'il y a entr'eux une différence.

Pour abréger, on a appelé *l'infini* l'état de la grandeur que l'on conçoit ou s'efforce de concevoir répondre au symbole $\frac{1}{o}$, qu'on a aussi désigné par ∞. On a dit que deux quantités (encore ainsi nommées) infinies, dont la différence est donnée, sont égales entre elles; et par exemple (*voy.* § 29), que deux mobiles dont la distance est donnée, et qui se meuvent dans un même sens avec des vîtesses égales, se rencontrent à une distance infinie. Ces expressions contradictoires et autres semblables me paroissent montrer la difficulté qu'on éprouve à concilier le signe par lequel on croit pouvoir représenter une quantité avec cette quantité même. Il me paroît que toute difficulté est levée, en introduisant l'idée de limite, telle que je l'ai exposée.

Soit z la différence assignée entre l'unité et l'exposant du rapport de x à $x+d$; dans la proportion, $x : x+d = 1 : 1+z$, ou

$1 : 1+\frac{d}{x} = 1 : 1+z$, on a $\frac{d}{x} = z$ ou, $x = \frac{d}{z}$.

Qu'on donne en même tems $d=o$; $z=o$; le signe $\frac{o}{o}$ indique l'indétermination de x;

position, par exemple, $b>\beta$, et partant $\beta>\epsilon$; on a $b+y=(b-\epsilon)\frac{\beta}{\beta-\epsilon}$, $\epsilon+y=\frac{\epsilon(b-\epsilon)}{\beta-\epsilon}$, $y=\frac{\epsilon(b-\beta)}{\beta-\epsilon}$. Appliquant ces formules à la supposition $\beta=\epsilon$, on a $y=\frac{\epsilon(b-\beta)}{o}$; formule qui indique qu'il y a lieu à une limite de rapport.

En général, soit une équation du premier degré, réduite à l'expression $ax+b=\alpha x+\epsilon$; si $b=\epsilon$, on doit avoir $a=\alpha$, et alors toute valeur de x satisfait à l'équation. Puisque $ax=\alpha x+\epsilon-b=\alpha(x+\frac{\epsilon-b}{\alpha})$; $x:x+\frac{\epsilon-b}{\alpha}=\alpha:a$; dans cette proportion, la différence $\frac{\epsilon-b}{\alpha}$ des deux termes du premier rapport est déterminée; donc l'unité est la limite de l'exposant de ce rapport.

Je vais ajouter quelques exercices relatifs plus particulièrement aux proportions.

§ 49. *Prob.* Soient donnés quatre nombres, a, b, c, d; on demande le nombre x qu'on doit ajouter à chacun d'eux pour obtenir une proportion géométrique.

Dén. Soit x le nombre cherché : les

termes

termes de la proportion seront, $a+x$, $b+x$, $c+x$, $d+x$.

Cond. $a+x : b+x = c+x : d+x$.

Soit $a>c$, et partant $b>d$.

Réd. On aura : $a-c : b-d = \dfrac{a+x : b+x}{c+x : d+x}$.

Soit $a>b$, et partant $c>d$.

$$a-b-c+d : \frac{a-c}{b-d} = a-b : \frac{a+x}{b+x} = c-d : \frac{c+x}{d+x}.$$

Partant, on a :

$$a+x = \frac{(a-b)(a-c)}{a-b-c+d},\quad b+x = \frac{(a-b)(b-d)}{a-b-c+d}.$$

$$c+x = \frac{(a-c)(c-d)}{a-b-c+d},\quad d+x = \frac{(b-d)(c-d)}{a-b-c+d}.$$

De l'une quelconque de ces formules, on tire : $x = \dfrac{bc-ad}{a-b-c+d}$.

Vér. $\begin{array}{l} a+x : b+x = a-c : b-d \\ c+x : d+x = a-c : b-d \end{array}$

Donc, $a+x : b+x = c+x : d+x$.

Rem. 1re. En supposant $a \begin{array}{l} >b \\ >c \end{array}$, on doit avoir $a+d>b+c$ (§ 46) : si on a en même tems

$bc > ad$, la question est résolue dans le sens propre de l'énoncé ; mais si on a en même tems $\begin{matrix} a+d > b+c \\ ad > bc \end{matrix}$, la valeur de x change de signe, et on résout la question dans laquelle on demande le nombre qui, étant ôté des quatre nombres donnés a, b, c, d, donne des restes en proportion géométrique.

Si $ad = bc$, les quatre nombres proposés forment une proportion géométrique.

Soit en même tems $\begin{matrix} a+d = b+c \\ ad = bc \end{matrix}$; la valeur de x est indéterminée.

Lorsque ces deux équations ont lieu en même tems, on a

$$\begin{array}{c} (a+d)^2 = (b+c)^2 \\ 4ad = 4bc \\ \hline (a-d)^2 = (b-c)^2 = (c-b)^2. \end{array}$$

$$\text{Donc, } a-d = \begin{matrix} b-c \\ c-b. \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Mais} & a+d = b+c \\ \hline \text{Donc,} & a = \begin{matrix} b \\ c \end{matrix}; \\ & d = \begin{matrix} c \\ b \end{matrix}. \end{array}$$

Savoir, a étant égal à l'un des termes moyens, d doit être égal à l'autre des termes moyens; alors, les quatre nombres donnés forment bien une proportion, quel que soit le même nombre qu'on ajoute à chacun d'eux ou qu'on ôte de chacun d'eux.

Rem. 2de. On auroit pu établir la condition, d'après l'égalité des produits des extrêmes et des moyens.

Cond. $(a+x)(d+x)=(b+x)(c+x)$.

Réd. $ad+x(a+d)+xx=bc+x(b+c)+xx$.

$ad+x(a+d)=bc+x(b+c)$.

1er. *Cas.* Soit $a+d=b+c$; on doit avoir $ad=bc$; et la question est indéterminée.

2d. *Cas.* Soit $a+d>b+c$;

$x(a-b-c+d)=bc-ad$; $x=\frac{bc-ad}{a-b-c+d}$.

3e. *Cas.* Soit $a+d<b+c$; $x=\frac{ad-bc}{b-a-d+c}$.

En supposant $a+d>b+c$, soit $bc<ad$; $x=-\frac{ad-bc}{a-b-c+d}$, on résout la question dans laquelle on demande quel est le nombre qu'on doit ôter des quatre nombres donnés pour obtenir une proportion. En effet, qu'on pro-

pose ce dernier problème ; on aura pour condition $(a-x)(d-x)=(b-x)(c-x)$;

ou $ad-x(a+d)+xx=bc-x(b+c)+xx$,

$x(a-b-c+d)=ad-bc$; $x=\frac{ad-bc}{a-b-c+d}$.

Les produits $\begin{matrix}(a-x)(d-x) \text{ et } (x-a)(x-d)\\(b-x)(c-x) \text{ et } (x-b)(x-c)\end{matrix}$

ne différant que par les signes des deux facteurs dont ils sont composés, sont les mêmes; et partant, on n'a aucune raison de dire qu'on résout l'une plutôt que l'autre des quatre équations suivantes :

$$(a-x)(d-x)=(b-x)(c-x)$$
$$(a-x)(d-x)=(x-b)(x-c)$$
$$(x-a)(x-d)=(b-x)(c-x)$$
$$(x-a)(x-d)=(x-b)(x-o).$$

Chacune de ces quatre équations conduit à une même valeur de x; mais, les signes des valeurs obtenues pour $a-x$, $b-x$, $c-x$, $d-x$, apprennent laquelle de ces quatre équations est résolue.

Ainsi, $a-x=a-\frac{ad-bc}{a-b-c+d}=\frac{aa-ab-ac+bc}{a-b-c+d}$

$=\frac{a(a-b)-c(a-b)}{a-b-c+d}=\frac{(a-b)(a-c)}{a-b-c+d}$.

Partant, en supposant $a+d>b+c$, si on a en même tems $a\begin{smallmatrix}>b\\>c\end{smallmatrix}$, ou $a\begin{smallmatrix}<b\\<c\end{smallmatrix}$, on répond à l'une des équations relatives au facteur $a-x$; mais si on a en même tems $a\begin{smallmatrix}>b\\<c\end{smallmatrix}$ ou $a\begin{smallmatrix}<b\\>c\end{smallmatrix}$, on répond à des équations relatives au facteur $x-a$.

Ex. 1°. Soit $a=13$, $b=9$, $c=5$, $d=3$.

$a+d=16$; $b+c=14$; $ad=39$;

$bc=45$; $a-b-c+d=2$; $bc-ad=6$.

$$x=\frac{bc-ad}{a-b-c+d}=\tfrac{6}{2}=3,$$

nombres qui forment la proportion, 16, 12, 8, 6.

2°. Soit $a=19$, $b=15$, $c=11$, $d=9$.

$a+d=28$, $b+c=26$, $ad=171$, $bc=165$;

$a-b-c+d=2$; $bc-ad=-6$;

$$x=\frac{bc-ad}{a-b-c+d}=-\tfrac{6}{2}=-3,$$

nombres qui forment la proportion

19—3, 15—3, 11—3, 9—3

ou, 16, 12, 8, 6.

§ 50. En développant la question suivante, (tirée de l'Arithmétique universelle de NEWTON), je me propose de montrer comment

on peut quelquefois, par une fiction, ramener à des questions simples et déjà résolues, d'autres questions qui peuvent d'abord paroître assez compliquées.

Probl. Des bœufs en nombres donnés b et b', ont brouté dans des tems donnés t et t', l'herbe de deux prés, d'étendues données p et p', dans chacun desquels l'herbe étoit à une même hauteur au moment de leur entrée, et continuoit de croître uniformément depuis leur entrée. On demande le nombre b'' de bœufs qui consommeront l'herbe d'un troisième pré p'' semblable aux premiers, pendant un tems donné t''.

Recherche. Soient conçus décomposés les nombres b et b' l'un et l'autre en deux parties, $\mathfrak{b}$, β, $\mathfrak{b}'$, β'; telles, que les bœufs dont les nombres sont $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$, soient conçus consommer seulement l'herbe qui se trouve dans les prés p et p' au moment de leur entrée dans ces prés; et que les bœufs dont les nombres sont β et β', soient conçus consommer l'herbe qui croît dans ces prés depuis leur entrée. Les nombres $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ sont entr'eux comme l'herbe qu'ils ont à brouter directement, et comme les tems pendant lesquels ils la broutent inversement, c. à d., comme $\frac{p}{t}$ et $\frac{p'}{t'}$,

Les nombres β et β' sont aussi entr'eux comme l'herbe qu'ils ont à brouter directement et les tems pendant lesquels ils la broutent inversement ; mais l'herbe croissant uniformément est proportionnelle directement à la grandeur des prés et directement au tems pendant lequel elle croît ; donc, les nombres β et β', sont entr'eux directement comme les grandeurs des prés p et p'.

On doit donc partager les nombres b et b', le premier, dans les parties ζ et β, et le second, dans les parties ζ' et β', de manière que $\zeta : \zeta' = \frac{p}{t} : \frac{p'}{t'}$, on trouve (§ 48) et $\beta : \beta' = p : p'$;

$$\zeta = b\frac{t'}{t'-t} - b'\frac{p}{p'}\cdot\frac{t'}{t'-t}; \quad \beta = b'\frac{p}{p'}\cdot\frac{t'}{t'-t} - b\frac{t}{t'-t}.$$

$$\zeta' = b\frac{p'}{p}\cdot\frac{t}{t'-t} - b'\frac{t}{t'-t}; \quad \beta' = b'\frac{t'}{t'-t} - b\frac{p'}{p}\cdot\frac{t}{t'-t}.$$

Soit conçu de même le nombre cherché b'' de bœufs qui doivent consommer l'herbe du pré p'' dans le tems t'' décomposé dans les deux nombres ζ'' et β'', dont les premiers consomment l'herbe qu'ils trouvent à leur entrée dans ce pré, et les autres consomment l'herbe qui continue de croître depuis leur

entrée : on aura $\mathcal{C} : \mathcal{C}'' = \frac{p}{t} : \frac{p''}{t''} = \frac{p}{p''} : \frac{t}{t''}$;

$$\mathcal{C}'' = \mathcal{C} \times \frac{t}{t''} . \frac{p''}{p} = b\frac{p''}{p} . \frac{t}{t''} . \frac{t'}{t'-t} - b'\frac{p''}{p} . \frac{t}{t''} . \frac{t'}{t'-t}.$$

$$\beta'' = \beta \times \frac{p''}{p} = b' . \frac{p''}{p'} . \frac{t'}{t'-t} - b . \frac{p''}{p} . \frac{t}{t'-t}.$$ De là ;

$$b'' = b\, \frac{p''}{p} . \frac{t}{t'-t} \left(\frac{t'}{t''} - 1\right) + b' \frac{p''}{p'} . \frac{t'}{t'-t} \left(1 - \frac{t}{t''}\right).$$

$$= b\frac{p''}{p} . \frac{t}{t''} . \frac{t'-t''}{t'-t} . + b' \frac{p''}{p'} . \frac{t'}{t''} . \frac{t-t''}{t-t'} .$$

Ex. Soit $t = 12$, $p = 60$; $t' = 15$, $p' = 72$; $t'' = 18$, $p'' = 96$.

$$\mathcal{C}'' = b\frac{96}{60} . \frac{12}{18} . \frac{15}{3} . - b' . \frac{96}{72} . \frac{12}{18} . \frac{15}{3} = \frac{16}{3} b - \frac{40}{9} b'.$$

$$\beta'' = b' \frac{96}{72} . \frac{15}{3} . \quad - b . \frac{96}{60} . \frac{12}{5} \quad = \frac{20}{3} b' - \frac{32}{5} b.$$

Soit $b' = 81$, $b = 75$; $\mathcal{C}'' = 400 - 360 = 40$, $\beta'' = 540 - 480 = 60$. $b'' = 40 + 60 = 100$.

Partant, si 75 bœufs ont brouté dans 12 jours, un pré de 60 ares (conforme aux conditions énoncées) ; et si 81 bœufs ont brouté dans 15 jours un pré de 72 ares ; il faudra

100 bœufs, pour brouter, dans 18 jours, un pré de 96 ares.

Rem. Des neuf quantités $\begin{matrix} b, & p, & t, \\ b', & p', & t', \\ b'', & p'', & t'', \end{matrix}$ huit quelconque étant données, on peut déterminer la neuvième, et en particulier deux quelconque des trois quantités b'', p'', t'', étant connues, on détermine la troisième, dans ces deux quantités et dans les six premières $\begin{matrix} b & p & t \\ b', & p', & t' \end{matrix}$ On a :

$$p''=\frac{pp'b''t''(t'-t)}{bp't(t'-t'')-b'pt'(t-t'')}.$$

$$t''=\frac{tt'p''(bp'-b'p)}{tp'(bp''-b''p)-t'p(b'p''-b''p')}.$$

Aut. Soit h la hauteur à laquelle l'herbe est dans chacun des prés originairement; soit z l'accroissement de l'herbe dans un tems donné, pris pour unité de tems, dans un espace donné, pris pour unité d'espace : les quantités totales d'herbe contenues dans les prés, p, p', p'', pendant les tems, t, t', t'', seront respectivement $ph+ptz$, $p'h+p't'z$, $p''h+p''t''z$. Or, ces quantités sont entr'elles comme les produits des nombres des bœufs qui les consomment par les tems pendant lesquels ils les consomment : on a donc pour

déterminer z la proportion
$bt : b't' = ph + ptz : p'h + p't'z$, de laquelle on tire $bhp't + bp'tt'z = b'hpt' + b'ptt'z$.

Soit, par ex. $bp' > b'p$; $z = h \times \frac{b'pt' - bp't}{tt'(bp' - b'p)}$.

$$ph + ptz = \frac{pp'bh(t'-t)}{t'(bp'-b'p)}; p'h + p't'z = \frac{pp'b'h(t'-t)}{t(bp'-b'p)};$$

$$p''h + p''t''z = p''h. \frac{bp't(t'-t'') - b'pt'(t-t'')}{tt'(bp'-b'p)}.$$

Or, $ph + ptz : p''h + p''t''z = bt : b''t''$;

de là, $b'' = b. \frac{p''}{p}. \frac{t}{t''}. \frac{t'-t''}{t'-t} + b'. \frac{p''}{p'}. \frac{t'}{t''}. \frac{t-t''}{t-t'}$.

§ 51. *Prob.* Un rectangle dont les côtés sont a et b étant donné, trouver le côté d'un quarré, tel, que leurs surfaces soient entr'elles comme leurs contours.

Dén. Côté du quarré cherché . . . . x;
Demi-contour du quarré . . . . . $2x$;
Surface . . . . xx.

Cond. $a+b : 2x = ab : xx$.
Réd $(a+b)x : 2xx = 2ab : 2xx$; $(a+b)x = 2ab$;

Sol. $x = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}}$;

$$a+b:2x=a+b:\frac{4ab}{a+b}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2:ab.$$

$$ab:xx=ab:\frac{aabb}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2:ab.$$

L'équation $(a+b)x=2ab$; ou $\frac{a+b}{2}x=ab$, donne la proportion $\frac{a+b}{2}:a=b:x$; partant, le côté du quarré est une quatrième proportionnelle à la demi-somme des côtés du rectangle et à chacun d'eux.

Soit c le côté du quarré de l'équation $(a+b)c=2ab$; deux quelconque des trois quantités a, b, c étant données, on détermine la troisième; on a, $b(2a-c)=ac$; $b=\frac{ac}{2a-c}$.

Application. Un rectangle, dont les côtés sont a et b étant proposé, et un côté a' d'un autre rectangle étant aussi donné, trouver l'autre côté b' de manière que leurs surfaces soient entre elles comme leurs contours.

Soit pris c côté d'un quarré, tel que, relativement à chacun des deux rectangles les surfaces soient entre elles comme les contours. On aura

$$c=\frac{ab}{\frac{a+b}{2}};\ b'=\frac{a'c}{2a'-c}=\frac{a'\frac{ab}{a+b}}{a'-\frac{ab}{a+b}}$$

$$=\frac{aa'b}{aa'+b(a'-a)}=b\times\frac{aa'}{aa'-b(a-a')}.$$

On pourroit aussi déduire cette formule de la proportion $a+b : a'+b'=ab : a'b'$, qui donne :

$$(a+b)a' \quad : (a'+b')a'=ab : a'b'$$
$$(a+b)a'-ab : a'a' \quad =ab : a'b'$$
$$(a+b)a'-ab : ab \quad =a'a' : a'b'=a' : b'.$$

Prob. Un parallelipipède rectangle étant donné, trouver le côté d'un cube tel que leurs surfaces soient entre elles comme leurs capacités.

Soient a, b, c les arêtes données du parallélipipède.

Dén. Soit x le côté du cube cherché.
Demi-surface du cube . . . . . . $3xx$.
Capacité . . . . x^3.

Cond. $ab+ac+bc : 3xx= abc : x^3$.
Réd. $(ab+ac+bc)x : 3x^3=3abc : 3x^3$;
$(ab+ac+bc)x \quad =3abc$;

Sol. $x=\frac{3abc}{ab+ac+bc}=\frac{abc}{\frac{ab+ac+bc}{3}}$.

$ab+ac+bc:3xx=\left(\frac{ab+ac+bc}{3}\right)^3 : aabbcc.$

$abc:x^3= \quad =\left(\frac{ab+ac+bc}{3}\right)^3 : aabbcc.$

De l'équation, $x=\frac{3abc}{ab+ac+bc}$, trois quelconque des quantités a, b, c, x, étant données, on détermine la quatrième ; par exemple, on obtient $a(3bc-x(b+c))=bcx$; $a=\frac{bcx}{3bc-x(b+c)}$.

Item. Soient a, b, c, les trois arêtes données d'un parallélipipède rectangle, et soient b', c', deux des arêtes données d'un autre parallélipipède : on peut déterminer la troisième arête a' de ce parallélipipède, de manière que leurs surfaces soient entre elles comme leurs capacités. Soit x le côté du cube qui jouit de la propriété proposée, relativement à chacun de ces parallèlipipèdes. On a :

$$x=\frac{3abc}{ab+ac+bc}=\frac{3a'b'c'}{a'b'+a'c'+b'c'};$$

$$a'=\frac{abb'cc'}{abb'(c'-c)+acc'(b'-b)+bb'cc'}.$$

Autre. ex. Un cylindre droit, dont la hauteur est h, et le rayon de la base r étant donné, trouver le rayon R d'une sphère telle, que leurs surfaces soient entre elles comme leurs capacités.

Une sphère étant donnée, ou un cylindre étant donné, et une des dimensions d'un autre cylindre (sa hauteur ou le rayon de sa base) étant donnée; trouver son autre dimension, de manière que les surfaces de ces solides soient entre elles comme leurs capacités (1).

§ 52. Au moyen des proportions, on peut ramener les produits de deux ou de plusieurs dimensions, à des nombres moindres de dimensions.

1°. Le produit ab, est une quatrième proportionnelle à l'unité à a et à b, et l'expres-

---

(1) Les découvertes de M.r Le Sage, sur les points les plus importans de la physique générale, et en particulier, sur le mécanisme de la pesanteur, l'ont conduit à s'occuper de la proportionnalité qui peut avoir lieu entre les surfaces des corps et leurs volumes; ce qui fournit une des réponses aux objections trop souvent élevées contre toute explication mécanique de la gravité.

sion $\frac{ab}{c}$ est le quatrième terme d'une proportion dont c, a, et b sont les trois premiers.

2°. Soit l'expression $\frac{abc}{de}$. A d, a, b, soit prise une quatrième proportionnelle, laquelle soit f, on aura $\frac{ab}{d}=f$, et $\frac{abc}{de}=\frac{fc}{e}$. Or $\frac{fc}{e}$ est une quatrième proportionnelle à e, c, f.

On réduira de même à une quantité d'une seule dimension, toute fraction dont les termes sont des produits continuels, tels, que le nombre des dimensions du numérateur surpasse d'une unité le nombre des dimensions du dénominateur.

3°. Soit la somme $ab+cd$, à réduire en un seul produit. Soit fait $\frac{cd}{a}=e$; ou $cd=ae$, $ab+cd=a(b+e)$.

Soit $abc+def$ à réduire en un seul produit; soit fait $de=ag$, $abc+def=a(bc+gf)$; soit $gf=bh$, $abc+def=ab(c+h)$.

De même, soient les produits de quatre dimensions $abcd$, $efgh$, dont on doit exprimer la somme ou la différence en un seul produit.

Soit $ef=ai$, $ig=bl$, $lh=cm$, $abcd\pm efgh=abc(d\pm m)$.

Le procédé est le même, quel que soit le nombre des dimensions de deuxproduits dont on doit prendre la somme ou la différence.

Le même procédé s'applique à un nombre quelconque de produits.

Ex. Soient les trois produits, abc, def, ghi: soient réduits chacun des deux produits def, ghi, à avoir pour facteurs deux des facteurs du premier produit tels que a et b, en sorte qu'on ait $def=abl$; $ghi=abm$; on aura $abc+def+ghi=ab(c+l+m)$. Et le même procédé s'applique à un nombre quelconque de dimensions de chacun des produits.

Soit la fraction $\frac{abcd}{efg+hil}$ proposée à réduire.

Soit fait $efg=ab\times m$, $hil=ab\times n$; on aura

$$\frac{abcd}{efg+hil}=\frac{cd}{m+n}.$$

De même, soit $\frac{abcd}{efg+hil+mno}$; soit fait $efg=ab\times p$; $hil=ab\times q$; $mno=ab\times r$.

$$\frac{abcd}{efg+hil+mno}=\frac{cd}{p+q+r}.$$

CHAPITRE

CHAPITRE V.

Problèmes indéterminés du premier degré.

Nous avons déjà vu un grand nombre d'exemples de questions indéterminées, dont l'indétermination provient de ce que les conditions, énoncées en apparence en même nombre que celui des inconnues, sont cependant en nombre moindre, à cause de leur dépendance mutuelle. Dans les questions qui font l'objet de ce chapitre, le nombre des conditions énoncées est moindre que le nombre des inconnues ; cependant, l'indétermination de ces questions n'est pas complète, en tant que les nombres qui doivent exprimer les quantités inconnues, sont limités à être entiers et positifs. Je vais faire précéder le développement général de ce sujet, par quelques exemples extrêmement simples.

§ 53. Qu'on demande deux nombres entiers et positifs, dont la somme est 10.

Dans cette question, il y a seulement une condition bien déterminée, relative à la somme

donnée des deux nombres ; elle seroit donc susceptible d'un nombre illimité de solutions, si la restriction que les nombres cherchés doivent être entiers et positifs, n'en diminuoit pas beaucoup le nombre. En effet, comme un des nombres cherchés doit être plus petit que 10, les paires de nombres entiers qui satisfont aux conditions, se réduisent à 9; et si on n'a pas égard à l'ordre suivant lequel on prend ces parties, on a seulement les cinq solutions $\frac{1}{9}, \frac{2}{8}, \frac{3}{7}, \frac{4}{6}, \frac{5}{5}$.

Si on prend le mot somme dans un sens plus étendu que son sens propre, et qui permette l'introduction des nombres négatifs; ou plutôt, si on demande tous les nombres entiers et positifs dont la différence est donnée, la question est indéterminée dans un sens beaucoup plus étendu, puisque la plus petite partie peut être un nombre entier et positif quelconque, et la plus grande, ce dernier nombre augmenté de la différence donnée.

Il arrive quelquefois que la nature même de l'objet dont on s'occupe, limite le nombre des solutions admissibles. Par exemple, qu'on demande tous les nombres entiers, composés de deux caractères, dont la différence est 6;

les nombres admissibles sont seulement 17, 28, 39, 93, 82, 71, 60.

Comme les questions analogues à celles que je viens d'énoncer ne comportent aucune difficulté, je passe à des questions d'un autre genre.

§ 54. *Prob.* Une paysanne, en comptant ses œufs, a remarqué qu'elle peut les compter trois à trois et quatre à quatre, sans qu'il y ait aucun reste. Comment peut-elle, d'après cette double observation, se former une idée du nombre de ses œufs ?

Cette question revient à trouver l'expression des nombres qui sont en même tems des multiples de trois et de quatre. Le plus petit de ces nombres est 12, et leur expression générale est $12n$, en prenant pour n un nombre entier et positif quelconque.

En général, soient p et q des nombres entiers premiers entr'eux. Le plus petit nombre qui est multiple de l'un et de l'autre est pq, et l'expression générale des multiples de l'un et de l'autre est pqe, en prenant pour n un nombre entier quelconque.

Si l'observation énoncée étoit que les œufs peuvent être comptés par 4 et par 8, la première connoissance seroit contenue dans la

seconde, et n'apprendroit rien de plus que cette dernière. En général, si mp est un multiple de p, aussi tout multiple de mp est un multiple de p.

Si l'observation énoncée étoit que les œufs peuvent être comptés par 4 et par 6, comme 4 et 6 ont un diviseur commun, savoir 2, cette observation seroit la même que si elle étoit relative aux nombres 3 et 4; partant, le plus petit des nombres cherchés seroit 12, et l'expression générale des nombres cherchés seroit $12n$. En général, soient mp, mq, deux nombres ayant un diviseur commun m, le plus petit multiple de ces deux nombres est, $\frac{mp \times mq}{m} = mpq$; et l'expression générale des multiples de ces deux nombres est $mpqn$.

Que la paysanne rapporte qu'en comptant ses œufs trois à trois, il en reste 2, et qu'en les comptant quatre à quatre, il n'en reste point. Tous les nombres pairement pairs, qui donnent 2 pour reste quand on les divise par 3, sont tels, qu'ils surpassent de deux unités des multiples impairement pairs de trois. Or, les multiples impairement pairs de trois, sont

de la forme $(4n-2)3=12n-6$; et les nombres qui surpassent ces multiples de deux unités, sont de la forme $12n-4$, en donnant à n toutes les valeurs entières et positives à commencer par l'unité ; ou $12n+8$, en donnant à n toutes les valeurs entières et positives depuis le zéro, ces nombres forment donc la suite 8, 20, 32, 44, 56, 68..... $8+12n$.

De même, le plus petit nombre divisible par 4, qui surpasse d'une unité un multiple de 3, est 4 lui-même, et l'expression générale des nombres qui jouissent de cette double propriété, est $12n+4$.

Si la paysanne rapportoit qu'en comptant ses œufs trois à trois, il reste 2, et qu'en les comptant six à six, il en reste 3, ces deux assertions seroient contradictoires, puisque les nombres qui surpassent de trois unités les multiples de six, sont des multiples de trois.

§. 55. La petitesse des nombres 3 et 4 a rendu très facile la détermination des nombres qui jouissent de la double propriété énoncée. Mais, si la question roule sur des nombres donnés, un peu grands, il est moins facile de déterminer la forme des nombres cherchés.

Qu'on demande tous les multiples de 5 qui surpassent d'une unité les multiples de 13.

Les nombres qui surpassent d'une unité les multiples de 13, sont: 14, 27, 40, 53, 66, 79, 92, 105, 118, 131......

Comme les multiples de 5 sont terminés par zéro ou par 5, on doit prendre dans cette suite les nombres qui ont l'une ou l'autre de ces deux terminaisons. Le plus petit des nombres cherchés est 40, le suivant est 105, et l'expression générale des nombres cherchés est $65n+40$, en donnant à n une valeur entière et positive quelconque depuis le zéro.

De même, les multiples de 5 qui surpassent de 2, 3, 4 unités les multiples de 13, sont de la forme $65e+15$, $65e+55$, $65e+30$.

Le procédé qui vient d'être suivi est souvent applicable; mais lorsque les nombres sont très grands il peut entraîner dans des longueurs qu'on peut éviter au moyen du procédé général que je vais développer.

Trouver les multiples de 5 et de 13 qui diffèrent d'un nombre donné r.

Dén. Soient m et n les nombres par lesquels on doit multiplier 5 et 13 pour produire les multiples cherchés. Ces multiples seront $5m$ et $13n$.

Cond. $6m=13n+r$.

Réd. $m=2n+\frac{3n+r}{5}$. Par supposition, m doit être un nombre entier; donc, $2n+\frac{3n+r}{5}$ doit être un nombre entier. Mais la partie $2n$ est déterminée à être un nombre entier; donc, la partie $\frac{3n+r}{5}$ doit aussi être un nombre entier; soit ce nombre entier e, on aura $\frac{3n+r}{5}=e$; de là, $3n=5e-r$; $n=e+\frac{2e-r}{3}$. Par le même raisonnement, n et e étant des nombres entiers, $\frac{2e-r}{3}$ doit être un nombre entier lequel soit e'. On aura, $\frac{2e-r}{3}=e'$; $2e=3e'+r$; $e=e'+\frac{e'+r}{2}$. De même, e et e' devant être des nombres entiers $\frac{e'+r}{2}$ doit être un nombre entier, lequel soit e'', on aura $e'=2e''-r$. Je vais rapprocher les unes des autres les équations successives, auxquelles donne lieu cette recherche.

$$5m = 13n + r;\quad m = 2n + \frac{3n+r}{5} = 2n + e$$

$$3n = 5e - r;\quad n = e + \frac{2e-r}{3} = e + e'$$

$$2e = 3e' + r;\quad e = e' + \frac{e'+r}{2} = e' + e''$$

$e' = 2e'' - r$. Ayant exprimé e' dans r et dans le nombre entier e'', d'une manière entière, on exprimera les quantités précédentes e, n, m, dans e'' et dans r, d'une manière entière.

$e' = 2e'' - r.$
$e(= e' + e'') = 3e'' - r.$
$n(= e + e') = 5e'' - 2r.\quad 13n + r = 65e'' - 25r$
$m(= 2n + e) = 13e'' - 5r.\quad 5m = 65e'' - 25r$

Rem. 1re. Soit changé le signe de r, on résout l'équation $5n = 13m - r$, ou $13m = 5n + r$, et on obtient $\begin{matrix} n = 5e'' + 2r \\ m = 13e'' + 5r \end{matrix}$ $13n = 5m + r = 65e'' + 26r$.

Rem. 2de. Dans les divisions successives qu'a exigées la détermination de m et de n, on auroit pu prendre les quotiens entiers immédiatement plus grands que les véritables quotiens, lorsqu'ils approchent de ces derniers plus que n'en approchent ceux qui sont im-

médiatement plus petits, en introduisant des restes soustractifs, comme il suit :

$$5m=13n+r;\ m=3n-\frac{2n-r}{5}=3n-e$$

$$2n=\ 5e+r;\ n=2e+\frac{e+r}{2}=2e+e'$$

$$e=\ 2e'-r,$$
$$n=\ 5e'-2r$$
$$m=13e'-5r.$$

On parvient ainsi aux mêmes expressions que les précédentes, d'une manière un peu plus abrégée.

Rem. 3me. Puisque $5m=13n+r$;

$$\frac{5}{13}=\frac{n}{m}+\frac{r}{13m};\ \text{ou}\ \frac{5}{13}-\frac{5e'-2r}{13e'-5r}=\frac{r}{13(13e'-5r)}.$$

Soit $r=+1$; $\frac{5}{13}-\frac{5e'-2}{13e'-5}=\frac{1}{13(13e'-2)}$.

Soit fait e' égal aux nombres naturels successifs à commencer par l'unité : on obtient la suite de fractions $\frac{3}{8}, \frac{8}{21}, \frac{13}{34}, \frac{18}{47}, \frac{23}{60} \ldots \frac{5e'+8}{13e'+8}$; telles que l'excès de $\frac{5}{13}$ sur chacune d'elles est une fraction ayant pour numérateur l'unité, et pour dénominateur le produit de leurs dénominateurs par 13, on obtient

donc aussi $5(13e'+8)-13(5e'+3)=+1$; et en particulier les nombres 8 et 3, sont les plus petits nombres tels que, multipliant par eux les nombres donnés 5 et 13, le premier produit surpasse le second d'une unité.

Soit $r=-1$, on a: $\frac{5e'+2}{13e'+5}-\frac{5}{13}=+\frac{1}{13(13e'+5)}$;

en particulier $\frac{2}{5}-\frac{5}{13}=\frac{1}{5.13}$, et $2.13-5.5=1$. Les nombres 2 et 5 sont les plus petits nombres, tels que, multipliant par eux les nombres 13 et 5, l'excès du premier produit sur le second est l'unité.

Rem. 4me. Soient deux fractions successives $\frac{5e'+2}{13e'+5}$ et $\frac{5(e'+1)+2}{13(e'+1)+5}$, tirées de la suite $\frac{2}{5}, \frac{7}{18}, \frac{12}{31}, \ldots \frac{5e'+2}{13e'+5}$. J'affirme que l'excès de la première sur la seconde, est aussi l'unité sur le produit de leurs dénominateurs. En effet, exécutant les deux produits $(5e'+2)(13(e'+1)+5)$, et $(13e'+5)(5(e'+1)+2)$, on trouve pour leur différence l'unité.

De même, soient $\frac{5e'+3}{13e'+8}, \frac{5(e'+1)+3}{13(e'+1)+8}$,

deux fractions successives de la suite $\frac{3}{8}$, $\frac{8}{21}$, $\frac{13}{34}$, ... $\frac{5e'+3}{13e'+8}$; la différence de la seconde et de la première est aussi l'unité sur le produit de leurs dénominateurs.

En donnant à r les valeurs successives ± 2, ± 3, ± 4, ± 5, ... on détermine de même les fractions qui diffèrent de $\frac{5}{13}$ d'une fraction dont le numérateur est 2, 3, 4, 5, ... et dont le dénominateur est le produit de 13 par leur dénominateur.

§ 56. Avant que je passe à traiter ce sujet généralement, je vais encore y introduire par un ou deux exemples.

Trouver des multiples de 355 et de 452, qui diffèrent l'un de l'autre, d'un nombre donné r.

Soient ces multiples $355m$ et $452n$.

$355m - 452n = \pm r.$

$$355m = 452n \pm r; \quad m = n + \frac{97n \pm r}{355} = n + e$$

$$97n = 355e \mp r; \quad n = 3e + \frac{64e \mp r}{97} = 3e + e'$$

$$64e = 97e' \pm r; \quad e = e' + \frac{33e' \pm r}{64} = e' + e''.$$

$$33e' = 64e'' \mp r;\quad e' = e'' + \frac{31e'' + r}{33} = e'' + e'''$$

$$31e'' = 33e''' \pm r;\quad e'' = e''' + \frac{2e''' \pm r}{31} = e''' + e^{\text{IV}}$$

$$2e''' = 31e^{\text{IV}} \mp r;\quad e''' = 15e^{\text{IV}} + \frac{e^{\text{IV}} \mp r}{2} = 15e^{\text{IV}} + e^{\text{V}}$$

$$e^{\text{IV}} = 2e^{\text{V}} \pm r.$$

$e'''(=15e^{\text{IV}} + e^{\text{V}}) = 31e^{\text{V}} \pm 15r$
$e''(= e''' + e^{\text{IV}}) = 33e^{\text{V}} \pm 16r$
$e'(= e'' + e''') = 64e^{\text{V}} \pm 31r$
$e\ (= e' + e'') = 97e^{\text{V}} \pm 47r$
$n\ (= 3e + e') = 355e^{\text{V}} \pm 172r$
$m\ (= n + e) = 452e^{\text{V}} \pm 219r.$

Autrement.

$$355m = 452n \pm r;\ m = n + \frac{97n \pm r}{355} = n + e$$

$$97n = 355e \mp r;\ n = 4e - \frac{33e \pm r}{97} = 4e - e'$$

$$33e = 97e' \mp r;\ e = 3e' - \frac{2e' \pm r}{33} = 3e' - e''$$

$$2e' = 33e'' \mp r;\ e' = 16e'' + \frac{e'' \mp r}{2} = 16e'' + e'''$$

$$e'' = 2e''' \pm r.$$

$e'(=16e'' + e''') = 33e''' \pm 16r$
$e\ (= 3e' - e'') = 97e''' \pm 47r$
$n(= 4e - e') = 355e''' \pm 172r$
$m(= n + e) = 452e''' \pm 219r.$

De l'équation $355m = 452n \pm r$, on tire

$$\frac{355}{452} = \frac{n}{m} \pm \frac{r}{452.m} = \frac{355e \pm 172r}{452e \pm 219r} \pm \frac{r}{452(452e \pm 219r)}.$$

Soit $r = +1$; $\frac{355}{452} - \frac{355e+172}{452e+219} = \frac{1}{452(452e+219)}$.

On obtient la suite de fractions, $\frac{172}{219}$;

$\frac{527}{771}$, $\frac{882}{1223}$ .... telles, que l'excès de

$\frac{355}{452}$ sur chacune d'elles est l'unité sur le produit des dénominateurs; et que la différence de deux de ces fractions voisines, est aussi l'unité sur le produit de leurs dénominateurs.

Soit $r = -1$; $\frac{355e-172}{452e-219} - \frac{355}{452} = \frac{1}{452(452e-219)}$;

ou, $\frac{355e+183}{452e+233} - \frac{355}{452} = \frac{1}{452(452e+233)}$,

En particulier, $\frac{183}{233} - \frac{355}{452} = \frac{1}{452.233}$.

Soit $r = -2$; $\frac{355e-344}{452e-438} - \frac{355}{452} = \frac{2}{452(452e-438)}$,

en particulier, $\frac{11}{14} - \frac{355}{452} = \frac{2}{14.452} = \frac{1}{7.452}$.

Rem. La fraction $\frac{355}{452}$ exprime le rapport approché de la surface du cercle au quarré

Cond. $ma = nb + d$. Ssoit $a < b$.

$$m = \frac{nb \pm d}{a}; \quad \text{Soit. } b = qa + r; \qquad m = nq + \frac{nr \pm d}{a} = nq + e$$

$$n = \frac{ea \mp d}{r}; \quad a = q'r + r'; \qquad n = eq' + \frac{er' \mp d}{r} = eq' + e'$$

$$e = \frac{e'r \pm d}{r'}; \quad r = q''r' + r''; \qquad e = e'q'' + \frac{e'r'' \pm d}{r'} = e'q'' + e''$$

$$e' = \frac{e''r' \mp d}{r''}; \quad r' = q'''r'' + r'''; \quad e' = e''q''' + \frac{e''r''' \mp d}{r''} = e''q''' + e'''$$

$$e'' = \frac{e'''r'' \pm d}{r'''}; \quad r'' = q^{IV}r''' + r^{IV}; \quad e'' = e'''q^{IV} + \frac{e'''r^{IV} \pm d}{r'''} = e'''q^{IV} + e^{IV}$$

et ainsi de suite.

En examinant ce procédé, on voit que les quotiens successifs $q, q', q'', q''', q^{IV} \ldots$, et les restes successifs $r, r', r'', r''', r^{IV} \ldots$, sont ceux qu'on obtient en cherchant le plus grand diviseur commun des nombres a et b; et comme ces nombres sont supposés rationnels, ils ont une commune mesure : partant cette opération est terminée; et il y a un dernier reste r^{M} qui entre dans le reste précédent r^{M-1} un nombre entier de fois.

Lorque les nombres a et b sont premiers entr'eux, le dernier reste r^{M} est l'unité; on obtient pour dernière équation $e^{M-1} = e^{M}r^{M-1} \pm d$; et partant, on obtient pour e^{M-1} un nombre entier. On obtient ensuite successivement en

e^{M}

e^{M} les valeurs de $e^{\text{M-II}}$, $e_{\text{M-III}} \ldots e''$, e', e, n, m; par les équations

$$e^{\text{M-II}} = e^{\text{M-I}} q^{\text{M}} + e^{\text{M}}$$
$$e^{\text{M-III}} = e^{\text{M-II}} q^{\text{M-I}} + e^{\text{M-I}}$$
$$e'' = e''' q^{\text{IV}} + e^{\text{IV}}$$
$$e' = e'' q''' + e'''$$
$$e = e' q'' + e''$$
$$n = e q' + e'$$
$$m = n q + e.$$

Lorsque a et b ne sont pas premiers entr'eux, pour que l'équation $ma = nb \pm d$ soit possible, il faut que d soit divisible par le plus grand diviseur commun de a et de b; savoir : dans l'équation $e^{\text{M-I}} = \frac{e^{\text{M}} r^{\text{M-I}} \pm d}{r^{\text{M}}}$, si $r^{\text{M-I}}$ est divisible par r^{M}, il faut que d soit divisible par r^{M}, et alors $e_{\text{M-I}}$ est un nombre entier.

Le cas où a et b ne sont pas premiers entr'eux, peut toujours se ramener au cas où a et b sont premiers entr'eux; en divisant par leur plus grand diviseur commun les deux membres de l'équation $ma = nb \pm d$.

§ 58. La possibilité de résoudre en nombres entiers l'équation $ma = nb \pm d$, dans laquelle a et b sont des nombres premiers en-

tr'eux, et d un nombre entier quelconque, peut être démontrée immédiatement et indépendamment du procédé par lequel on détermine m et n.

1°. Dans l'équation $m=\frac{nb\pm d}{a}$, soit fait n égal à tous les nombres entiers et positifs plus petits que a; j'affirme que les restes qu'on obtient (dont le nombre est a) sont tous inégaux entr'eux.

En effet, soient n et n' deux valeurs de n, auxquelles répondent les quotiens q et q', et les restes r et r', de manière qu'on ait

$nb\pm d=qa+r$

$n'b\pm d=q'a+r'$

Partant, . . $b(n-n')=a(q-q')+(r-r')$.

Et . . . . $q-q'=\frac{b(n-n')}{a}-\frac{r-r'}{a}$.

Or, si l'on pouvoit avoir $r=r'$, on auroit $q-q'=\frac{b(n-n')}{a}$; mais a et b sont supposés premiers entr'eux: donc $\frac{n-n'}{a}$ devroit être un nombre entier; ce qui est impossible, puisque chacun des deux nombres n et n' et, à plus forte raison, l'excès de l'un sur l'autre, est plus petit que a.

2°. J'affirme qu'il y a une valeur de n qui rend la quantité $\frac{nb \pm d}{a}$ un nombre entier.

Puique les valeurs de r, qui répondent à toutes les valeurs de n plus petites que a, sont inégales entr'elles et plus petites que a, leur nombre est a; ces valeurs de r sont donc comprises dans la suite $a-1$, $a-2$, $a-3$, ... 2, 1, 0.

Donc, en particulier, il y a une de ces valeurs qui est zéro, et alors $nb \pm d$ est divisible par a, ou $\frac{nb \pm d}{a}$ est un nombre entier.

3°. Soit ce nombre entier m, on aura $ma = nb \pm d$; ou $ma - nb = \pm d$.

Rem. 1re. Quand on a trouvé deux valeurs entières correspondantes de m et de n, qui résolvent l'équation $ma - nb = \pm d$, on peut trouver, autant qu'on le veut, d'autres valeurs entières de m et de n, qui résolvent la même équation.

Pour cela, soit fait $\begin{matrix} m' = qb + m \\ n' = qa + n \end{matrix}$; et partant . . . . $\begin{matrix} m'a = qab + ma, \\ n'b = qab + nb; \end{matrix}$

donc, $m'a - n'b = ma - nb = \pm d$.

Rem. 2[de]. Quand on a résolu l'équation $ma-nb=\pm 1$, on peut aussi résoudre l'équation $m'a-n'b=\pm d$; en faisant $\begin{matrix} m'=qb\pm md \\ n'=qa\pm nd \end{matrix}$

de là . . . $\begin{matrix} m'a=qab\pm mad \\ n'b=qab\pm nbd \end{matrix}$

$$m'a-n'b \quad =\pm d(ma-nb)=\pm d.$$

§.59. Après avoir satisfait à la question, trouver les nombres qui étant divisés par deux nombres donnés, donnent des restes donnés, ou trouver les multiples de deux nombres donnés, qui diffèrent de quantités données : il est facile de l'appliquer à la recherche des nombres qui, étant divisés par trois nombres donnés, donnent des restes donnés; puis de passer à quatre, à cinq, à six. . . . . diviseurs donnés; ou, ce qui revient au même, il est facile de trouver des multiples de trois, de quatre, de cinq, de six . . . nombres donnés, dont les différences soient données.

1[er]. *Ex.* On demande les nombres qui, étant divisés par 3, par 4, et par 5, donnent les restes, 2, 3 et 4, respectivement.

Les nombres cherchés sont de chacune des formes $3x+2$, $4y+3$, $5z+4$; ou, ce qui revient au même, de chacune des formes $3x-1$, $4y-1$, $5z-1$.

1°. Soit $3x-1=4y-1$; on trouve que les nombres qni satisfont à cette équation sont de la forme $12e-1$.

2°. Soit $12e-1=5z-1$; on trouve que les nombres qui satisfont à cette condition, sont de la forme $60e-1$.

Donc, les nombres qui satisfont aux trois conditions proposées, sont de la forme $60e-1$.

2d. *Ex.* Qu'on ajoute pour 4me condition que les nombres proposés sont divisibles par 7 ou de la forme $7v$; on trouve pour l'expression des nombres cherchés $420e+119$. Partant, le nombre 119 est le plus petit des nombres qui satisfont aux quatre formes demandées; et les nombres cherchés sont la somme de 119 et d'un multiple quelconque de $420=3\times4\times5\times7$.

Rem. On auroit pu, dans ce cas, trouver immédiatement la forme des nombres cherchés.

Les nombres divisibles en même tems par 3, par 4, et par 5, sont de la forme $3.4.5e=60e$. Donc, les nombres auxquels il manque 1, pour être divisibles par chacun des nombres 3, 4, et 5, sont de la forme $60e-1$, qui forment la suite 59, 119, 179, 239, 299....

Parmi ces nombres, 119 est divisible par 7; et partant, le plus petit des nombres cher-

chés est 119. A ce nombre, ajoutant un multiple quelconque de chacun des nombres 3, 4, 5, et 7 qui est de la forme $420e$, on obtient la forme des nombres cherchés $420e+119$.

§ 60. *Aut. ex.* Trouver tous les nombres divisibles par 11, tels que, quand on les divise par 13, il reste 2; quand on les divise par 15, il reste 14, ou il manque 1; quand on les divise par 17, il reste 3.

Outre le procédé précédent, on peut en employer quelques autres.

1°. Soient x, y, z, v, les nombres par lesquels on doit multiplier les nombres 11, 13, 15, 17, pour obtenir les nombres cherchés : on aura

$$\begin{aligned} 11x &= 13y+2, \\ &= 15z-1, \\ &= 17v+3. \end{aligned}$$

Soient cherchées les valeurs de x qui satisfont à chacune de ces équations en particulier; on trouve

$$\begin{aligned} x &= 13y'-1, \\ &= 15z'+4, \\ &= 17v'+8. \end{aligned}$$

Soient cherchées les valeurs de y' qui satisfont à chacune des équations,

$$\begin{aligned} 13y'-1 &= 15z'+4, \\ &= 17v'+8. \end{aligned}$$

On trouve, $y'=15z''+5$,

$=17v''+2$.

Enfin, soit résolue l'équation

$$15z''+5=17v''+2,$$

ou $15z'' =17v''-3$; on trouve

$$z'' =17v'''-7,$$
$$y' =15.17v'''-100,$$
$$x =13.15.17v'''-1301,$$
$$11x =11.13.15.17v'''-14311.$$

Partant, les nombres cherchés sont de la forme 11. 13. 15. $17e-14311$, ou de la forme 11. 13. 15. $17e+22154$.

L'avantage de ce procédé consiste en ce qu'on opère, pendant le cours de la réduction, sur des nombres qui ne sont pas plus grands que les nombres proposés. Mais d'un autre côté il a l'inconvénient d'exiger qu'on traite un nombre d'équations simples, égal au nombre des manières dont peuvent être prises deux à deux, des quantités en nombre inférieur d'une unité à celui des conditions énoncées.

2°. Soit cherché le plus petit nombre N′ divisible par chacun des nombres 11, 13, 15, qui, étant divisé par 17, donne le reste 3.

Soit cherché le plus petit nombre N″, divisible par chacun des nombres 11, 13, 17, qui étant divisé par 15, donne le reste —1.

Soit cherché le plus petit nombre N^{IV} divisible par chacun des nombres 11, 15, 17, qui étant divisé par 13, donne le reste 2.

La somme des nombres N', N'', N''' sera divisible par 11, et quand on la divisera par 13, 15 et 17, elle donnera les restes 2, —1, et 3 respectivement.

D'abord, cette somme est divisible par 11, puisque chacun des nombres N', N'', N''' est divisible par 11.

Les nombres N' et N'' sont l'un et l'autre divisibles par 13, donc, leur somme est divisible par 13. Mais, N''' surpasse de 2 unités un multiple de 13; donc aussi, $N'+N''+N'''$ surpasse de deux unités un multiple de 13.

De même, les nombres N' et N''', sont l'un et l'autre divisibles par 15; donc leur somme est divisible par 15; mais N'' est inférieur d'une unité à un nombre divisible par 15. Donc, la somme $N'+N''+N'''$ est inférieure d'une unité à un nombre divisible par 15.

Enfin, $N''+N'''$ est divisible par 17, et $N'+N''+N'''$ surpasse de 3 unités un nombre divisible par 17.

A cette somme $N'+N''+N'''$ soit ajouté un multiple quelconque de chacun des nombres 11, 13, 15, 17, lequel est $11.13.15.17e$, les nombres

cherchés, sont $N'+N''+N'''+11.13.15.17e$.

Partant, lorsque tous les diviseurs sont premiers entr'eux, le problème proposé est toujours possible, et il peut toujours être ramené au cas de deux diviseurs seulement, dont l'un ne donne aucun reste.

§ 61. Je passe au cas où les diviseurs proposés ne sont pas premiers entr'eux, en l'éclaircissant par un exemple.

Qu'on demande les nombres qui étant divisés par 18, 20, 24, 30, donnent respectivement les restes 5, 9, 17, 29.

Les nombres 18, 20, 24, 30, ont des diviseurs communs.

Le nombre cherché est de chacune des quatre formes, $18x+5$, $20y+9$, $24z+17$, $30v+29$.

On a donc les trois équations

$$18x+5 = \begin{matrix} 20y+9 \\ 24z+17 \\ 30v+29 \end{matrix} \quad \text{ou} \quad 18x = \begin{matrix} 20y+4 \\ 24z+12 \\ 30v+24 \end{matrix}$$

qui se réduisent à

$$9x = \begin{matrix} 10y+2 \\ 12z+6 \\ 15v+12. \end{matrix}$$

Dans l'équation $9x=10y+2$, les coefficiens 9 et 10 sont premiers entr'eux; donc, cette équation est toujours résoluble.

Dans l'équation $9x=12z+6$, le reste 6 est divisible par le plus grand diviseur commun 3 des coefficiens 9 et 12 ; donc aussi, cette équation est toujours résoluble, et elle est la même que l'équation $3x=4z+2$, dans laquelle les coefficiens de x et de z sont premiers entr'eux

De même l'équation $9x=15v+12$, est la même que l'équation $3x=5v+4$, toujours résoluble.

Partant, la première forme des nombres cherchés est compatible avec chacune des trois autres, donc, elles sont compatibles entr'elles, et on a les trois équations

$$9x=10y+2$$
$$3x=4z+2$$
$$3x=5v+4.$$

De l'équation $9x=10y+2$, on tire $x=10y'-2$.
De l'équation $3x=4z+2$, on tire $x=4z'-2$.
De l'équation $3x=5v+4$, on tire $x=5v'+3$.

De l'équation, $10y'-2=4z'-2$, on tire $z'=5y''$.
De l'équation, $5v'+3=4z'-2$, on tire $z'=5v''$.

De là, $v''=y''$,
$x=20y''-2$,
$=20e-2$.

Forme du nombre cherché $20\times18e-31=360e+329$.
Le plus petit des nombres cherchés est 329.
$329=18\times18+5=20\times16+9=24\times13+17=30\times10+29$.

Rem. Les deux valeurs de z' tirées des deux équations $10y'-2=4z'-2$; $5v'+3=4z'-2$, ont conduit à une même expression de z', ce qui montre que ces deux équations sont identiques, et comme elles sont tirées des deux valeurs de $9x$, $10y+2$ et $15v+12$, il faut montrer que ces deux dernières expressions sont identiques.

En effet, $10y+2$ étant pair, $15v+12$ est aussi pair; donc v est pair, et $15v+12$ est de la forme $30v'+12$. Donc, le nombre $9x$ est tel que quand on le divise par 30, il reste 12; et partant, quand on le divise par 10, il reste 2. Donc, les deux formes $10y+2$ et $15v+12$, sont identiques.

§ 62. Après avoir montré que l'équation $ax-by=d$, est toujours résoluble en nombres entiers, lorsque les nombres donnés, a et b, sont premiers entr'eux, ou lorsque d est divisible par leur plus grand diviseur commun, et qu'il y a autant de valeurs qu'on le veut, de x et de y, qui satisfont à cette équation, je passe aux équations de la forme $ax+by=s$, dans lesquelles on cherche des multiples des deux nombres donnés a et b, dont la somme est donnée. Je vais éclaircir

le procédé à suivre dans cette recherche, par quelques exemples.

Prob. On a acheté un certain nombre entier d'aunes d'étoffe, à 16 fr. l'aune; et un certain nombre entier d'aunes d'une autre étoffe, à 21 fr. l'aune. On a payé pour le tout 531 fr. On demande le nombre des aunes de chaque espèce.

Dén. Nombre des 1[res] aunes x; prix $16x$
des 2[des] y; prix $21y$.

Cond. $16x+21y=531$.

Réd. $16x=531-21y$.

$$x=33-y-\frac{5y-3}{16}=33-y-e$$

$$5y=16e+3;\ y=3e+\frac{e+3}{5}=3e+e'$$

$$e=5e'-3$$

Sol.
$$y(=3e+e')=16e'-9$$
$$x(=33-y-e)=45-21e'.\quad 16x=720-16.21e'$$
$$21y=21.16e'-189$$
$$16x+21y=531.$$

Limite. Pour que le problème soit résolu dans le sens propre de l'énoncé, on doit avoir

$$\left.\begin{array}{l}16e'\overline{\overline{>}}\ 9;\ e'\overline{\overline{>}}\ \frac{9}{16}\\ 21e'\overline{\overline{<}}45;\ e'\overline{\overline{<}}2\ \frac{1}{7}\end{array}\right\}$$; mais, e' doit être un nom-

bre entier, et les nombres entiers compris entre $\frac{9}{16}$ et $2\frac{4}{7}$ sont 1 et 2; donc,

$e' = 1,\ 2.$

$y = 7,\ 23. \qquad 21y = 147,\ 483.$

$x = 24,\ 3. \qquad 16x = 384,\ 48.$

$16x + 21y = 531,\ 531.$

Rem. Le problème proposé a donc deux solutions seulement, et partant, les équations de la forme $ax+by=s$, diffèrent essentiellement des équations de la forme $ax-by=d$, en ce que tandis que le nombre des solutions des équations de la dernière forme est illimité, le nombre des solutions des équations de la première forme (si elles en sont susceptibles) est limité; et il dépend de la grandeur du nombre donné s relativement aux nombres a et b.

Aut. ex. Partager 1000 en deux parties, dont l'une soit divisible par 7, et dont l'autre soit divisible par 13.

Cond. $7x+13y=1000$

Réd. $7x = 1000-13y$

$x = 143-2y+\frac{y-1}{7} = 143-2y+e.$

Sol. $y = 7e+1.$

$x = 141-13e.$

$7x = 987-7.13e.$

$13y = 13+7.13e.$

Vér. $7x+13y=1000.$

Limites. Pour que x soit positive, on doit avoir $13e \overline{\overline{<}} 141$; $e \overline{\overline{<}} 10\frac{11}{13}$.

Pour que y soit positive, on doit avoir $7e+1 \overline{\overline{>}} 0$; $e \overline{\overline{>}} -\frac{1}{7}$.

Partant, on a les 11 solutions.

$e=$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
$x=$	141,	128,	115,	102,	89,	76,	63,	50,	37	24,	11.
$y=$	1,	8,	15,	22,	29,	36,	43,	50,	57,	64,	71.
$7x=$	987,	896,	805,	714,	623,	532,	441,	350,	259,	168,	77.
$13y=$	13,	104,	195,	286,	377,	468,	559,	650,	741,	832,	923.

Chacune des sommes de ces nombres correspondans est 1000.

Rem. Si on résout l'équation $7x-13y=1000$; on trouve $\begin{matrix} x=141+13e \\ y=7e-1. \end{matrix}$ au lieu de $\begin{matrix} x=141-13e \\ y=7e+1. \end{matrix}$

Les valeurs de x diffèrent par le signe du terme $13e$; ce qui répond au changement de signe du coefficient 13 de y; ou par le signe de e; et si dans le $y=7e-1$, on change le signe de e qui rend cette valeur $=-(7e+1)$, elle ne diffère que par le signe de la valeur de y dans le second cas.

Autr. exerc. Une personne qui doit 853 fr., n'a pour les payer que des écus de 5 francs, et des pièces de 6 liv. (qu'on reçoit pour 6 fr.). Comment peut-elle acquitter sa dette?

La piastre valant 5 £. 8 s. de France, comment peut-on payer 1000 £. avec des piastres et des écus de 3 £?

La piastre valant 3 £. 5 s. 6 d. argent courant de Genève, et le louis valant 14 £. 10 s. 6 d., on demande les manières de payer 10000 £. c. avec des louis et des piastres seulement.

Trente personnes, hommes femmes et enfans, ont dépensé en tout 50 fr. Les dépenses d'un homme, d'une femme, et d'un enfant, sont 3 fr. 2 fr. 1 fr., respectivement. On demande combien il peut y avoir d'hommes, de femmes, et d'enfans.

On achète 100 pièces de bétail, des veaux, des chèvres et des moutons. Chaque veau coûte 24 fr.; une chèvre, coûte 20 fr.; et un mouton, coûte 18 fr. On paie pour le tout 1964 fr. On demande le nombre des bêtes de chaque espèce.

Un orfèvre a trois lingots d'argent, de trois titres différens. Le premier est au titre de 11 deniers; le second est au titre de $10\frac{1}{2}$ deniers; et le troisième est au titre de 9 den.

Combien doit-il prendre d'onces (en nombres entiers) de chaque lingot, pour faire un lingot de 30 onces, dont le titre soit à 10 d.?

§ 63. Dans tous les problèmes précédens, le nombre des conditions (sans compter celle qui détermine que les nombres cherchés doivent être entiers et positifs) est inférieur d'une unité seulement au nombre des inconnues : si le nombre des inconnues surpasse de plus que d'une unité le nombre des conditions, le problème peut être dit indéterminément indéterminé, puisque une des inconnues étant prise à volonté, le problème reste indéterminé relativement aux inconnues restantes. Je vais développer un ou deux exemples de ce genre de questions.

On emploie des ouvriers, auxquels on paie trois prix différens; savoir : 5 fr. 4 fr. 3 fr. On paie en tout, 29 fr. On demande toutes les manières dont on a pu employer des ouvriers à ces différens prix.

Que les nombres d'ouvriers à 5 fr. 4 fr. 3 fr. soient x, y, z, respectivement; on a l'équaquation $5x+4y+3z=29$.

Comme le coefficient de x est le plus grand, je cherche le plus grand nombre d'ouvriers qu'on a pu employer à 5 fr., en divisant 29 par 5; le quotient 5+ apprend qu'on n'a pas

pu

pu employer plus que cinq ouvriers à ce prix. On peut donc essayer six valeurs de x; savoir : 0, 1, 2, 3, 4, 5.

1°. Soit $x=0$; $4y+3z=29$; $y=2,\ 5.$ $z=7,\ 3.$

2°. Soit $x=1$; $4y+3z=24$; $y=0,\ 3,\ 6.$ $z=8,\ 4,\ 0.$

3°. Soit $x=2$; $4y+3z=19$; $y=1,\ 4.$ $z=5,\ 1.$

4°. Soit $x=3$; $4y+3z=14$; $y=2$ $z=2$

5°. Soit $x=4$; $4y+3z=9$; $y=0$ $z=3$

6°. Soit $x=5$; $4y+3z=4$; $y=1$ $z=0$.

En omettant les solutions dans lesquelles on n'emploie aucun ouvrier à l'un des prix, on a les quatre solutions suivantes.

x	y	z.
1	3	4.
2	1	5.
2	4	1.
3	2	2.

Aut. exemp. Résoudre en nombres entiers l'équation $4x+5y+9z=67$, en omettant les solutions où une des inconnues est 0.

La plus grande valeur de z est 7 ; à cette valeur de z répond l'équation $4x+5y=4$, qui n'admet d'autre solution que $x=1$, $y=0$, qu'on doit omettre.

1°. Soit $z=1$; $4x+5y=58$. $x=12, 7, 2$. $y=2, 6, 10$.

2°. Soit $z=2$; $4x+5y=49$, $x=11, 6, 1$. $y=1, 5, 9$.

3°. Soit $z=3$; $4x+5y=40$, $x=5$ $y=4$

4°. Soit $z=4$; $4x+5y=31$; $x=4$ $y=3$

5°. Soit $z=5$; $4x+5y=22$; $x=3$. $y=2$.

6°. Soit $z=6$; $4x+5y=13$; $x=2$. $y=1$.

Je passe à la solution en nombres entiers des équations, dont quelque terme est affecté du produit de deux inconnues.

§ 64. *Probl.* Trouver en nombres entiers les côtés d'un rectangle, tels, que sa surface contienne quatre fois autant de pieds quarrés que son contour contient de pieds lignes.

Dén. Côté du rectangle cherché . . . x et y.
Surface . . . . xy.
Contour . . . . $2(x+y)$.

Cond. $xy=8(x+y)$.

Réd. $xy-8x=8y$;

$$x=\frac{8y}{y-8}=\frac{8y-64}{y-8}+\frac{64}{y-8}=8+\frac{64}{y-8}.$$

Pour que x soit un nombre entier, $y-8$ doit être égal à quelqu'un des diviseurs de 64; donc, $y-8=$ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64

y = 9, 10, 12, 16, 24, 40, 72

x = 72, 40, 24, 16, 12, 10, 9.

Partant, on obtient les quatre solutions :

$x=$	9,	10,	12,	16.
$y=$	72,	40,	24,	16.
$xy=$	648,	400,	288,	256.
$x+y=$	81,	50,	36,	32.

En général, qu'on ait l'équation $xy=m(x+y)$.

$$x(y-m)=my\,;\quad x=\frac{my}{y-m}=\frac{my-mm}{y-m}+\frac{mm}{y-m}=m+\frac{mm}{y-m}.$$

Partant, $y-m$ est quelqu'un des diviseurs de mm, et y est égal à chacun de ces diviseurs augmenté de m.

Ex. Soit $m=6$; $y-6=$ 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

y = 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 24, 42

x = 42, 24, 18, 15, 12, 10, 9, 8, 7.

§ 65. *Probl.* On demande en nombres entiers les parallélipipèdes rectangles à bases quarrées, tels, que leur capacité vaut 5 fois

autant de pieds cubes, que leur surface contient de pieds quarrés.

Dén. Côté de la base x; Surface des bases $2xx$
Hauteur y; Surface latérale $4xy$
Capacité xxy. Surface totale $2x(x+2y)$.

Cond. $xxy=10x(x+2y)$.

Réd. $xy=10\ (x+2y)$; $xy-10x=20y$;

$$x=\frac{20y}{y-10}=\frac{20y-200}{y-10}+\frac{200}{y-10}=20+\frac{200}{y-10}.$$

$y-10=$ 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200.
$y\ =$ 11, 12, 14, 15, 18, 20, 30, 35, 50, 60, 110, 210.
$\frac{200}{y-10}=$ 200, 100, 50, 40, 25, 20, 10, 8, 5, 4, 2, 1.
$x\ =$ 220, 120, 70, 60, 45, 40, 30, 28, 25, 24, 22, 21.

En général. Que le nombre qui exprime la capacité vaille m fois le nombre qui exprime la surface.

On a, $xy=2m(x+2y)$. $x(y-2m)=4my$.

$$x=\frac{4my}{y-2m}=\frac{4my-8mm}{y-2m}+\frac{8mm}{y-2m}=4m+\frac{8mm}{y-2m}.$$

Partant, $y-2m$ est égal à chacun des diviseurs de $8mm$.

Ex. Soit $m=3$; $8mm=72$.

$y-6=$ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.
$y\ =$ 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 24, 30, 42, 78.
$\frac{72}{y-6}=$ 72, 36, 24, 18, 12, 9, 8, 6, 4, 3, 2, 1.
$x\ =$ 84, 48, 36, 30, 24, 21, 20, 18, 16, 15, 14, 13.

§ 66. *Probl.* Soit a le côté d'un quarré donné en nombre entier : on demande en nombres entiers les côtés x et y d'un rectangle, tels, que leurs surfaces soient entr'elles comme leurs contours.

Cond. $xy : aa = x + y : 2a$

Réd. $xy : aa = a(x+y) : 2aa$

$$a(x+y) = 2xy;\ x(2y-a) = ay;$$

$$x = \frac{ay}{2y-a};\ 2x = \frac{2ay}{2y-a} = \frac{2ay-aa}{2y-a} + \frac{aa}{2y-a}.$$

$$= \quad a \quad + \frac{aa}{2y-a}.$$

Partant, $2y-a$ doit être égal aux diviseurs de aa.

Ex. 1[er]. Soit $a=12$; $aa=144$.

$2y-a=$	1,	2,	3,	4,	6,	8,	9,	12,	16,	18,	24,	36,	48,	72,	144.
$2y\ =$	13,	14,	15,	16,	18,	20,	21,	24,	28,	30,	36,	48,	60,	84,	156.
$y\ =$	»	7,	»	8,	9,	10,	»	12,	14,	15,	18,	24,	30,	42,	78.
$\frac{aa}{2y-a}=$	»	72,	»	36,	24,	18,	»	12,	9,	8,	6,	4,	3,	2,	1.
$2x\ =$	»	84,	»	48,	36,	30,	»	24,	»	20,	18,	16,	»	14,	».
$x\ =$	»	42,	»	24,	18,	15,	»	12,	»	10,	9,	8,	»	7,	».

On a donc les quatre solutions $\frac{7}{42}, \frac{8}{24}, \frac{9}{18}, \frac{10}{15}$.

Ex. 2[d]. Soit $a=15$, $aa=225$.

$2y-a = 1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15,\ 25,\ 45,\ 75,\ 225.$

$2y \quad = 16,\ 18,\ 20,\ 24,\ 30,\ 40,\ 60,\ 90,\ 240.$

$y = 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 15,\ 20,\ 30,\ 45,\ 120.$

$\frac{aa}{2y-a} = 225,\ 75,\ 45,\ 25,\ 15,\ 9,\ 5,\ 3,\ 1.$

$x = 120,\ 45,\ 30,\ 20,\ 15,\ 12,\ 10,\ 9,\ 8.$

On a les quatre solutions $\frac{8}{120}, \frac{9}{75}, \frac{10}{45}, \frac{12}{20}.$

§ 67. *Probl.* Soit a le côté d'un cube donné en nombre entier : on demande en nombres entiers le côté de la base, et la hauteur d'un parallélipipède rectangle à base quarrée, de manière que leurs capacités soient entr'elles comme leurs surfaces.

Dén. Côté de la base . . . . x.
Hauteur . . . . . . y.
Capacité . . . . . . xxy.
Surface . . . $2xx+4xy$.

Cond. $xxy : a^3 = xx+2xy : 3aa.$
Réd. $xxy : a^3 = a(xx+2xy) : 3a^3$

$a(xx+2xy)=3xxy;\ a(x+2y)=3xy,\ x(3y-a)=2ay.$

$x=\frac{2ay}{3y-a};\ 3x=\frac{6ay}{3y-a}=\frac{6ay-2aa}{3y-a}+\frac{2aa}{3y-a}.$

$3x=2a+\frac{2aa}{3y-a}.$

Partant, $3y-a$ est un des diviseurs de $2aa$, $3y$ est un de ces diviseurs augmenté de a,

et y est le tiers de chacun de ces résultats lorsqu'il est entier.

Ex. Soit $a=6$; $aa=36$; $2aa=72$.

$3y-a=$	1,	2,	3,	4,	6,	8,	9,	12,	18,	24,	36,	72.
$3y=$	7,	8,	9,	10,	12,	14,	15,	18,	24,	30,	42,	78.
$y=$	»	»	3,	»	4,	»	5,	6,	8;	10,	14,	26.
$\frac{2aa}{3y-a}=$	»	»	24,	»	12,	»	8,	6,	4,	3,	2,	1.
$3x=$	»	»	36,	»	24,	»	20,	18,	16,	15,	14,	13
$x=$	»	»	12,	»	8,	»	»	6,	»	5,	»	»
$y=$	»	»	3,	»	4,	»	»	6,	»	10,	»	».

Soit a le côté d'un cube; et soient x, y, z, les côtés d'un parallélipipède rectangle, et que les capacités de ces solides doivent être entr'elles comme leurs surfaces. On doit avoir la proportion $a^3 : xyz = 3aa : xy+xz+yz$.

De là, $3xyz=a(xy+xz+yz)$.

$$x(3yz-a(y+z)=ayz\,;\quad x=\frac{ayz}{3yz-a(y+z)}.$$

On peut prendre une des quantités y et z à volonté, et déterminer l'autre de manière que x soit un nombre entier; ou bien, on peut prendre les arêtes y et z dans un rapport quelconque, et déterminer l'une d'elles de manière que x soit un entier.

Ex. Soit $y=2z$; $x=\frac{2azz}{6zz-3az}=\frac{2az}{6z-3a}$.

$$3x=\frac{2az}{2z-a}=\frac{2az-aa}{2z-a}+\frac{aa}{2z-a}=a+\frac{aa}{2z-a}.$$

Soit $y=3a$; $x=\frac{3aaz}{9az-a(3a+z)}=\frac{3az}{8z-3a}$.

$$8x=\frac{24az}{8z-3a}=\frac{24az-9aa}{8z-3a}+\frac{9aa}{8z-3a}=3a+\frac{9aa}{8z-3a}.$$

§ 68. *Probl.* Trouver en nombres entiers tous les rectangles, tels que leur surface contienne 20 pieds quarrés de plus que leur contour ne contient de pieds lignes.

Dén. Côtés du rectangle cherché, x et y.

Cond. $xy=2(x+y)+20$.

Réd. $x(y-2)=2y+20$, $x=\frac{2y+20}{y-2}=\frac{2y-4}{y-2}+\frac{24}{y-2}=2+\frac{24}{y-2}$.

$y-2=$ 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.
y $=$ 3, 4, 5, 6, 8, 10, 14, 26.
$\frac{24}{y-2}=$ 24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1.
x $=$ 26, 14, 10, 8, 6, 5, 4, 3.

On a donc les quatre valeurs des côtés
26 14 10 8
3' 4' 5' 6'.

§ 69. Il est connu qu'il n'y a que trois manières de remplir l'espace autour d'un point sur un plan avec des angles de figures régulières d'une seule espèce ; savoir : avec six angles du triangle équilatéral, avec quatre

angles du quarré, et avec trois angles de l'hexagone.

Mais on peut aussi remplir cet espace avec des angles de figures régulières d'espèces différentes; et la détermination des manières dont on peut le faire dépend en partie de la solution d'équations de la nature de celles qui viennent de nous occuper.

Probl. Déterminer les manières de remplir l'espace autour d'un point sur un plan avec des angles de figures régulières, ou déterminer les manières de prendre des angles de figures régulières, en sorte que la somme de ces angles fasse quatre angles droits.

Lemme connu. La valeur de chaque angle extérieur d'une figure régulière se trouve en divisant quatre angles droits par le nombre des angles ou des côtés du polygone, et la valeur de chaque angle du polygone est deux angles droits moins ce quotient.

Soit n le nombre des côtés du polygone, et soit pris l'angle droit pour unité.

Valeur de chaque angle extérieur $\frac{4}{n}$

Valeur de chaque angle du polygone $2-\frac{4}{n}$.

Chaque angle du triangle équilatéral vaut $\frac{2}{3}$, et six de ces angles valent quatre angles droits.

Soient pris cinq angles du triangle équilatéral. L'espace restant ne pourra être rempli que par un angle du triangle équilatéral.

Soient pris quatre angles du triangle équilatéral, l'espace restant pourra être rempli par deux angles du triangle équilatéral ou par un angle de l'hexagone.

Soient pris trois angles du triangle équilatéral, l'espace restant, en n'admettant aucun autre angle de triangle, ne pourra être rempli que par deux angles du quarré.

Soient pris deux angles de triangle équilatéral, l'espace restant pourra être rempli par deux angles d'hexagone. On demande s'il ne peut être rempli d'aucune autre manière. Si l'espace restant peut être rempli de quelqu'autre manière, il y entre au moins quelqu'angle de quarré ou de pentagone. 1°. Soit pris un angle du quarré, l'espace restant vaudra $1\frac{2}{3}$; et son supplément à deux droits vaut $\frac{1}{3}$, qui est l'angle extérieur du dodécagone régulier. 2°. Soit pris un angle du pentagone, qui vaut $1\frac{1}{5}$, l'espace restant vaut $1\frac{7}{15}$ qui n'est l'angle d'aucun polygone régulier.

Soit pris un seul angle de triangle, l'es-

pace restant vaudra $3\frac{1}{3}$, qui peut être rempli par deux angles du quarré et par un angle de l'hexagone. Je vais rechercher si cet espace peut aussi être rempli par deux angles seulement de figures régulières.

Soient m et n les nombres des côtés de ces figures, les valeurs de leurs angles sont $2-\frac{4}{m}$ et $2-\frac{4}{n}$, dont la somme est $4-(\frac{4}{m}+\frac{4}{n})$.

Cond. $4-(\frac{4}{m}+\frac{4}{n})=3\frac{1}{3}=4-\frac{2}{3}$.

Réd. $\frac{4}{m}+\frac{4}{n}=\frac{2}{3}$.

$6m+6n=mn$; $m=\frac{6n}{n-6}=\frac{6n-36}{n-6}+\frac{36}{n-6}=6+\frac{36}{n-6}$.

$n-6=$ 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.
$n=$ 7, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 24, 42.
$\frac{36}{n-6}=$ 36, 18, 12, 9, 6, 4, 3, 2, 1.
$m=$ 42, 24, 18, 15, 12, 10, 9, 8, 7.

Partant, il y a cinq manières de remplir l'espace autour d'un point sur un plan avec un angle de triangle équilatéral, et deux angles d'autres figures régulières; les nombres des côtés de ces figures, sont $\frac{7}{42}, \frac{8}{24}, \frac{9}{18}, \frac{10}{15}, \frac{12}{12}$.

Si on prend trois angles du quarré, ou deux angles du quarré, l'espace restant ne pourra pas être rempli par des angles de polygones d'un nombre de côté supérieur à quatre.

Soit pris un seul angle de quarré, l'espace restant, savoir, trois angles droits, pourra être rempli en particulier par deux angles d'octogne régulier. Je vais rechercher s'il y a d'autres polygones, dont deux angles font trois angles droits.

Soient m et n les nombres des côtés de ces polygones. Valeurs de leurs angles, $2-\frac{4}{m}$, $2-\frac{4}{n}$; somme $4-(\frac{4}{m}+\frac{4}{n})=3$.

$\frac{4}{m}+\frac{4}{n}=1$; $mn=4m+4n$; $mn-4m=4n$;

$$m=\frac{4n}{n-4}=\frac{4n-16}{n-4}+\frac{16}{n-4}=4+\frac{16}{n-4}.$$

Diviseurs de 16; 1, 2, 4, 8, 16. $=n-4$.

$$\frac{16}{n-4}=16,\ 8,\ 4,\ 2,\ 1.$$

$$n = 5,\ 6,\ 8,\ 12,\ 20.$$

$$m = 20,\ 12,\ 8,\ 6,\ 5.$$

Partant, en admettant un angle du quarré seulement, il y a trois manières de remplir

l'espace autour d'un point sur un plan avec des angles de figures régulières, dont les nombres de côtés sont $\frac{5}{20}, \frac{6}{12}, \frac{8}{8}$.

Soient pris deux angles du pentagone, qui valent $2\frac{2}{5}$, l'espace à remplir est $1\frac{3}{5}$, dont le supplément est $\frac{2}{5}$, qui est la valeur de l'angle extérieur du décagone : on peut donc remplir l'espace autour d'un point avec deux angles de pentagones et un angle de décagone.

Soit pris un seul angle de pentagone qui vaut $1\frac{1}{5}$; l'espace restant est $2\frac{4}{5}$: soient m et n les nombres des côtés des polygones dont deux des angles doivent remplir cet espace; on a

$$4-\left(\frac{4}{m}+\frac{4}{n}\right)=2\tfrac{4}{5};\ \frac{4}{m}+\frac{4}{n}=1\tfrac{1}{5}=\frac{6}{5};\ \frac{2}{m}+\frac{2}{n}=\frac{3}{5}$$

$$10m+10n=3mn;\ m(3n-10)=10n;$$

$$m=\frac{10n}{3n-10};\ 3m=\frac{30n}{3n-10}=\frac{30n-100}{3n-10}+\frac{100}{3n-10}=10+\frac{100}{3n-10}.$$

Diviseurs de 100 ; 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, $=3n-10$.

$3n=11,\ 12,\ 14,\ 15,\ 20,\ 30,\ 35,\ 60,\ 110.$

$n=\ 4,\ 5,\ 10,\ 20.$

$m=\ 20,\ 10,\ 5,\ 4.$

Partant, il n'y a aucune nouvelle manière de remplir l'espace proposé.

Enfin, en prenant deux angles de l'hexagone, ou un angle de l'hexagone, l'espace restant ne

peut pas être entièrement rempli par des angles de polygones dont les nombres de côtés sont plus grands que six.

En résumant ce qui précède, on trouve qu'il y a quatorze manières de remplir l'espace autour d'un point sur un plan avec des angles de figures régulières de nombres différens de côtés, et que de ces manières, les suivantes au nombre de six sont propres à remplir un espace indéfini.

Quatre angles du triangle, un angle de l'hexagone.
Trois angles du triangle, deux du quarré.
Deux angles de triangle, deux de l'hexagone.
Un angle du triangle, deux du dodécagone.
Un angle du quarré, deux de l'octogone.
Un angle du quarré, un de l'hexagone, et un du dodecagone.

§ 70. Au moyen des premiers élémens de l'analyse indéterminée que nous venons d'exposer, on peut étendre les applications de la proposition de polyhedrométrie développées dans le chapitre I^{er}., § 24. Je vais en donner un petit nombre d'exemples simples.

I^{er}. *Ex.* Quels sont les solides dont quelques angles solides sont formés par trois angles de triangles, et dont les autres angles solides sont formés par quatre angles de triangles.

Dén. Nombre des angles solides trigones x

Nombre des angles solides tétragones y.

Nombre des angles plans . . . . $3x+4y$.

Nombre des faces . . . . . . $\frac{3x+4y}{3}$.

Nombre des arêtes . . . . . $\frac{3x+4y}{2}$.

Cond. $x+y+\frac{3x+4y}{3}=\frac{3x+4y}{2}+2$.

Réd. $x+y=\frac{3x+4y}{6}+2$.

$3x+2y=12$; $2y=12-3x$;

$y=6-x-\frac{1}{2}x=6-x-e$; $x=2e$.

Sol. $x=2e$; $y=6-3e$; $\frac{3x+4y}{3}=8-2e$.

Lim. Pour que y soit positif; on doit avoir $e\overline{\gtrless}2$.

Partant, $e=0,\ 1,\ 2$.

$x=0,\ 2,\ 4$ angl. sol. trigones.

$y=6,\ 3,\ 0$, angl. sol. tétragones.

$x+y=6,\ 5,\ 4$, nombres des angl. sol.

$\frac{3x+4y}{3}=8,\ 6,\ 4$, nombres des faces.

Rem. Le premier et le troisième de ces solides ont été déterminés (§ 24); le second de ces solides, qui est un *hexahèdre-pentagone*, est la somme ou la différence de deux

pyramides triangulaires construites sur une base commune.

2^d^. *Ex.* Quels sont les solides dont quelques angles solides sont formés par trois angles de triangles ; et dont les autres angles solides sont formés par cinq angles de triangles.

Dén. Angles solides trigones x

Angles solides pentagones . . . . y.

Nombre des faces . . . . . $\frac{3x+5y}{3}$.

Nombre des arêtes . . . $\frac{3x+5y}{2}$.

Cond. $x+y+\frac{3x+5y}{3}=\frac{3x+5y}{2}+2.$

Réd. $x+y=\frac{3x+5y}{6}+2.$

$3x+y=12. \quad y=12-3x.$

Lim. $x \leqq 4$; $x = 0, \; 1, \; 2, 3, 4.$

$y=12, \; 9, \; 6, 3, 0.$

$x+y=12, \; 10, \; 8, 6, 4.$

$\frac{3x+5y}{3}=20, \; 16, \; 12, 8, 4.$

Rem. Je ne m'arrête pas à l'examen de la possibilité de ces solides. L'algèbre apprend seulement que, s'ils sont possibles, leur composition est quelqu'une de celles qui viennent d'être déterminées.

3^e^. *Ex.*

3ᵉ. *Ex.* Quels sont les solides dont quelques angles solides sont formés par trois angles de triangles, et dont les angles solides restans sont composés de six angles de triangles.

Aut. exerc. Compositions des angles solides.

Quatre et cinq angles de triangles.

Quatre et six angles de triangles.

Trois et quatre angles de quadrilatères.

Trois et cinq angles de quadrilatères.

Trois et quatre angles de pentagones.

On peut prolonger ces recherches en se proposant une plus grande variété dans la composition des angles solides. Ce sujet trouve des applications importantes, en particulier à la crystallographie.

CHAPITRE VI.

De l'Extraction de la Racine carrée ; et des Quantités incommensurables.

DANS les chapitres précédens, les équations que nous avons traitées, renfermoient seulement des quantités connues, et les produits de ces quantités par les quantités cherchées; mais elles ne contenoient aucun terme affecté du produit des quantités inconnues les unes par les autres. Leur solution n'a exigé l'emploi que des quatre premières opérations de l'arithmétique. Dans les questions que nous avons à traiter, les équations auxquelles elles conduisent, renferment les produits des quantités inconnues les unes par les autres, et, en particulier, le produit par elle-même d'une des quantités cherchées ou son carré; et leur solution exige qu'on sache trouver un nombre en connoissant son carré, ou l'opération appelée *Extraction de la racine carrée.* Je vais développer comme préliminaire cette opération.

§ 71. Nous avons vu (§ 26.) que le carré d'une quantité composée de deux parties, est composé du carré de la première partie, du double produit de la première partie par la seconde, et du carré de la seconde, ou que $(a+b)^2 = aa + 2ab + bb$.

Soit un nombre composé de deux caractères, c'est-à-dire, de dizaines et d'unités; son carré est composé du carré des dizaines, dont le dernier caractère est des centaines; du double produit des dizaines par les unités, dont le dernier caractère est des dizaines; et du carré des unités, dont le dernier caractère est des unités.

Exemple. Soit décomposé le nombre 47, dans 4 dizaines et 7 unités, ou soit $47 = 40 + 7$.

$$\begin{array}{rcr} 40^2 & = & 1600 \\ 2 \times 40 \times 7 & = & 560 \\ 7^2 & = & 49 \\ \hline 47^2 & = & 2209. \end{array}$$

Dans cette somme, le carré des unités est terminé à la place la plus à la droite; le double produit des dizaines par les unités est terminé à la seconde place en allant de la droite à la gauche; le arré des dizaines est terminé à la troisième place en allant de la droite à la gauche.

§ 72. Soit proposé le nombre 2209, dont on doit extraire la racine carrée. Comme les carrés de 1, 10, 100, 1000, etc. . . . . . sont respectivement, 1, 100, 10000, 1000 000, etc., et qu'en général, le carré d'un nombre composé d'un caractère significatif suivi d'un nombre quelconque de zéros, est composé du carré de ce caractère suivi d'un nombre double de zéros : puisque le nombre proposé contient seulement quatre caractères, ou qu'il est plus grand que 100 et plus petit que 10000, sa racine est plus grande que 10, et plus petite que 100, ou sa racine contient seulement des dizaines et des unités. Le carré des dizaines est contenu dans le nombre 22, mais le carré le plus voisin de 22 est 16, dont la racine est 4 : donc la racine a quatre dizaines. De 2209, ôtant le carré de 40, qui est 1600, il reste 609. Ce reste doit encore contenir le double produit des dizaines trouvées par les unités, et le carré des unités ; et en particulier, il doit contenir le double produit des dizaines par les unités, ou le produit du double des dizaines par les unités. Soit donc divisé 609 par 80 ou 60 par 8, le quotient 7 sera le nombre des unités ; le produit de 80 par 7 est 560, qui,

étant ôté de 609 donne 49 pour reste, qui est en effet le carré des unités.

Tableau de l'opération.

```
      2209 { 40+7.
      1600
     -----
80 )   609
       560
      ----
        49
        49
       ---
         0.
```

Ainsi que dans la division ordinaire on supprime les zéros, soit au quotient, soit aux soustrahendes successifs; on en fait de même dans l'extraction de la racine carrée, en conservant les places des caractères significatifs. Et comme on doit retrancher successivement le double produit des dizaines par les unités, et le carré des unités, c'est-à-dire, le produit des unités par la somme du double des dizaines, et des unités: on transporte les unités trouvées à la racine à côté du diviseur, et on multiplie le diviseur ainsi augmenté par les unités.

Tabl. de l'opér. abrégée

```
      2209 { 47
      16
     ----
87 )   609
       609
       ---
         0.
```

Soit de même un nombre composé de trois caractères, lequel soit décomposé dans ses centaines, ses dizaines et ses unités. Son carré sera composé, comme il suit, du carré des centaines qui est suivi de quatre zéros; du double produit des centaines par les dizaines, qui est suivi de trois zéros; du carré des dizaines, qui est suivi de deux zéros; du double produit du nombre composé des centaines et dizaines par les unités, produit qui est suivi d'un seul zéro; et enfin, du carré des unités.

Partant, omettant les zéros, et conservant leurs places aux caractères significatifs de ces produits successifs, les derniers caractères de ces produits seront successivement terminés d'une place plus à la droite.

Il en est de même pour un nombre composé d'un plus grand nombre de caractères.

De là, découle la règle générale suivante, pour extraire la racine carrée d'un nombre proposé.

§ 73. Soit proposé un nombre dont on doit extraire la racine carrée.

Soit divisé ce nombre en tranches de deux chiffres chacune, en allant de la droite à la gauche, dont celle qui est la plus à la gauche peut avoir un seul caractère. Le nombre

de ces tranches sera égal au nombre des caractères de la racine.

Soit cherché le plus grand carré contenu dans la tranche la plus à la gauche : soit placé la racine de ce carré à la place de la racine, et de cette tranche soit retranché ce carré. A côté du reste, soit descendu le caractère suivant; soit divisé le nombre qu'on obtient par le double de la racine trouvée; soit placé le quotient à la suite de la racine, et du dividende soit retranché le produit du diviseur par le quotient. A côté du reste, soit descendu le caractère suivant, et du nombre qui en provient, soit retranché le carré du dernier caractère de la racine. A côté du reste, soit descendu le caractère suivant; soit divisé le nombre qui en provient par le double de la partie trouvée de la racine; soit procédé tout comme précédemment, et soit continuée l'opération de la même manière, jusqu'à ce qu'on ait descendu tous les caractères du nombre proposé.

On simplifie un peu l'opération en descendant successivement les tranches entières dont on omet pour un moment les derniers caractères en faisant la division; on met les quotiens soit à la racine, soit à la droite du di-

viseur ; on multiplie le diviseur ainsi augmenté par le dernier caractère de la racine, et on retranche ce produit de toute la partie descendue du nombre proposé.

Exemp. Nombre proposé 19 079 424.

Ce nombre étant divisé	19 07 94 24 {4368
par tranches de deux chif-	16
fres chacune en allant	83) 30 7
de la droite à la gauche,	24 9
contient quatre tran-	866) 589 4
ches : donc la racine	519 6
cherchée contient qua-	8728) 6982 4
tre caractères. Le carré	6982 4
le plus voisin de 19 est 16,	0.

dont la racine est 4, qu'on place à la racine. De la première tranche 19, soit retranché le carré 16, il reste 3. A côté de ce reste on descend la tranche suivante 07, en omettant pour un moment son dernier caractère 7, et on divise la partie restante à la gauche 30, par le double 8 de la racine trouvée ; le quotient est 3. On place ce quotient, soit à la racine, soit à la droite du diviseur ; on multiplie le diviseur ainsi augmenté 83, par le quotient 3 ; on retranche le produit 249 de 307, le reste est 58. A côté de ce reste,

on descend la tranche suivante 94, en négligeant pour un moment son dernier caractère 4; on divise 589 par le double de 43 ou 86; on place le quotient 6, soit à la racine, soit à la droite du diviseur; on multiplie le diviseur ainsi augmenté 866 par le quotient 6, et on retranche le produit 5196 de 5894; le reste est 698. A côté de ce reste, on descend la tranche suivante 24, en négligeant pour un moment le dernier caractère 4; on divise 6982 par le double de la partie obtenue de la racine; le quotient est 8. On place ce quotient à la racine et à la droite du diviseur; on multiplie le diviseur, ainsi augmenté, par le quotient 8. Le produit étant égal à la partie qui reste du nombre proposé, la racine exacte est 4368.

§ 74. Lorsqu'on ne peut pas obtenir la racine carrée d'un nombre entier en nombres entiers, on en approche au moyen des fractions décimales, en ajoutant deux zéros au nombre proposé pour chaque caractère décimal approximatif qu'on veut avoir à la racine. Ainsi, pour extraire la racine carrée de 2, avec une approximation poussée jusqu'aux millièmes, on opère comme si on devoit extraire la racine carrée de 2 00 00 00, et on met

à la racine trois caractères décimaux. Cette racine ainsi approchée est 1.414.

Quant aux fractions, si les deux termes sont des carrés exacts en nombres entiers, on extrait la racine carrée de chacun de ces termes, et la fraction dont les termes sont les racines carrées des termes de la première, est la racine carrée de la fraction proposée.

Si les deux termes de la fraction ne sont pas des carrés en nombres entiers, il convient de rendre le dénominateur un carré, en multipliant les deux termes de la fraction par un nombre tel que le produit du dénominateur par ce nombre soit un carré, et on divise la racine approchée du numérateur de cette dernière fraction par la racine exacte du dénominateur. Ainsi, les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{8}$, étant respectivement égales aux fractions $\frac{6}{9}$, $\frac{35}{49}$, $\frac{14}{16}$, les racines carrées des premières fractions sont respectivement les racines carrées des nombres 6, 35, 14, divisées par 3, 7, 4, respectivement.

Lorsqu'on veut indiquer la racine carrée d'un nombre sans l'exécuter en effet, on se sert du signe $\sqrt{\ }$; ainsi, les expressions $\sqrt{2}$,

$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, sont respectivement celles des racines carrées des nombres 2, 3, 5.

§ 75. Lorsqu'on ne peut pas obtenir la racine carrée d'un nombre entier en nombres entiers, peut-on l'obtenir exactement par les fractions, soit décimales, soit ordinaires?

La discussion de cette question exige quelques notions préliminaires.

(1) *Déf.* On dit qu'un nombre entier est diviseur d'un nombre entier, lorsqu'il y entre un nombre entier de fois. Ainsi, le nombre 6 a pour diviseurs 2 et 3.

On appelle *nombre premier* un nombre entier qui n'a aucun diviseur entier que lui-même et l'unité; ainsi, les nombres 2, 3, 5, 7, 11, etc. . . . . . sont des nombres premiers.

Deux *nombres* sont dits *premiers entr'eux* lorsqu'ils n'ont aucun diviseur commun; ainsi les nombres 15 et 16, quoiqu'ils ne soient ni l'un ni l'autre des nombres premiers, sont premiers entr'eux.

---

(1) Ces définitions ont déjà été données dans l'arithmétique, à l'occasion des opérations sur les fractions; mais, j'ai cru devoir les répéter ici à cause de leur application immédiate à la doctrine des incommensurables. Je les ai admises comme connues dans le chapitre précédent, où elles entroient occasionnellement.

Lorsqu'une fraction est réduite à ses moindres termes, ou composée de termes premiers entr'eux, les termes des fractions qui lui sont égales, sont des équimultiples de ses termes.

Lemme. Le produit de deux nombres premiers n'est divisible par aucun autre nombre premier que par l'un d'eux.

Soient p et p', deux nombres premiers, dont le produit est pp'; soit π un nombre premier qui divise leur produit: j'affirme que π est égal à p ou à p'; en sorte que s'il n'est pas p il est p'.

Soit donc $\frac{pp'}{\pi}=q$ nombre entier, $\frac{p}{\pi}=\frac{q}{p'}$; les deux termes de la fraction $\frac{p}{\pi}$ étant supposés des nombres premiers inégaux, cette fraction est réduite à ses moindres termes; donc les termes de la fraction $\frac{q}{p'}$ sont égaux aux termes de la première, ou ils en sont des équimultiples; mais, p' est un nombre premier; donc, il n'est pas un multiple de π; donc il lui est égal. Donc, si π, diviseur de pp', n'est pas égal à p, il est égal à p'.

On montre de là que le produit continuel d'une suite quelconque de nombres premiers, n'a aucun diviseur premier que l'un d'entr'eux.

Soient, par exemple, p, p', p'', trois nombres premiers; soit π un nombre premier, diviseur de leur produit; j'affirme qu'il est égal à l'un des trois nombres p, p', p''; en sorte que s'il n'est ni p ni p', il est p''.

Soit donc, $\frac{pp'p''}{\pi}=q$; $\frac{pp'}{\pi}=\frac{q}{p''}$; puisque p, p', π, sont des nombres premiers, et que π n'est ni p, ni p', la fraction $\frac{pp'}{\pi}$ est réduite à ses moindres termes; donc, p'' est égal à π ou un multiple de π; mais p'' est un nombre premier; donc il n'est pas un multiple de π; donc il est π.

On passe de la même manière successivement aux produits composés de quatre, cinq, six . . . . . facteurs premiers.

Application. Si on a deux suites de nombres premiers, qui n'aient aucun terme commun, le produit continuel des termes de la première suite, est premier avec le produit continuel des termes de la seconde. En effet, chacun de ces produits n'a pour diviseur premier que quelqu'un de ses facteurs, et pour diviseur composé, que ceux qui sont les produits de ses facteurs.

En particulier, si deux nombres sont premiers entr'eux, leurs carrés sont premiers entr'eux.

Théor. Si un nombre entier n'a point de racine carrée en nombres entiers, il n'en a point non plus en nombres fractionnaires.

Dém. S'il est possible que la racine d'un nombre entier qui n'a pas de racine exacte en nombres entiers, soit obtenue exactement en nombre entier et en fraction, soit réduit ce nombre mixte en fraction, et soit réduite cette fraction à ses moindres termes; le carré de cette fraction devroit être égal au nombre entier proposé. Mais le carré de cette fraction est une fraction dont les termes sont les carrés de ses termes, et qui sont, par conséquent, premiers entr'eux; donc, le numérateur ne contient pas un nombre entier de fois le dénominateur, et partant, le carré de la fraction proposée n'est pas un nombre entier.

Rem. Ce raisonnement s'applique non-seulement aux racines carrées, mais encore aux racines de tous les ordres; savoir, si deux nombres sont premiers entr'eux, leurs puissances d'un ordre quelconque sont aussi premières entr'elles; et de là, si un nombre entier n'a pas une racine d'un ordre quelcon-

que en nombres entiers, il n'a pas non plus de racine de cet ordre en nombres fractionnaires.

§ 76. Quoique le développement de cette proposition remarquable et importante me paroisse très lumineux, on peut cependant l'éclaircir par des exemples particuliers qu'on peut développer par voie d'introduction.

Soit, par exemple, le nombre 2 qui n'a point de racine carrée en nombres entiers; si cette racine pouvoit être exprimée exactement en une fraction (improprement dite), le carré de cette fraction vaudroit 2; et partant, le carré de son numérateur seroit double du carré du dénominateur. Or, j'affirme qu'il n'est aucun nombre carré entier double d'un autre nombre carré entier.

Tous les nombres naturels sont terminés par quelqu'un des neuf premiers nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; ou par l'un d'eux suivi d'un ou de plusieurs zéros.

Les carrés des nombres naturels sont terminés par quelqu'un des nombres 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4, 1; ou par quelqu'un de ces nombres suivis de zéros; lesquelles terminaisons se réduisent à 1, 4, 9, 6, 5.

Quant aux quatre premières terminaisons, les doubles des nombres carrés sont termi-

nés par 2, 8, 8, 2, ou par 2, 8, qui ne sont pas des terminaisons de nombres carrés.

Quant au nombre 5, si un nombre est terminé par 5, son carré est terminé par 25, et le double de ce carré est terminé par 50. Mais le carré d'un nombre terminé par un nombre quelconque de zéros, est terminé par deux fois autant de zéros que le premier; donc le double d'un carré terminé par 5, n'est pas terminé comme doit l'être un carré.

Quant aux nombres terminés par un ou par plusieurs zéros, le raisonnement précédent s'y appliquera immédiatement, en décomposant ce nombre dans le produit du nombre qui précède ces zéros par l'unité suivie du même nombre de zéros, et en raisonnant sur le premier de ces facteurs, comme on vient de raisonner sur un nombre qui n'est pas terminé par un ou par quelques zéros.

Ce raisonnement s'applique avec très peu de changement aux nombres, 3, 7, 8, et en général aux nombres qui sont terminés par quelqu'un des quatre nombres 2, 3, 7, 8.

§ 77. L'extraction des racines donne donc lieu à une espèce de nombres, inconnue dans l'arithmétique ordinaire. On appelle *irrationnelles*, ou *incommensurables*, les quantités qu'on

qu'on conçoit être les racines des nombres entiers qui n'ont pas de racine de l'ordre proposé en nombres entiers. Et comme l'extraction des racines des fractions se réduit à l'extraction des racines des nombres entiers (en rendant leur dénominateur une puissance exacte de l'ordre dont on doit extraire la racine), cette dénomination s'étend aux nombres soit entiers soit fractionnaires.

Ainsi, les expressions $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \ldots$: $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{3}{4}}$ ou $\frac{1}{2}\sqrt{3}, \ldots$ désignent des quantités irrationnelles ou incommensurables, vu qu'elles n'ont aucune commune mesure avec l'unité, ou que leur rapport avec l'unité ne peut pas être assigné exactement en nombres.

L'addition et la soustraction des quantités irrationnelles s'exécutent de la même manière que l'addition et la soustraction des quantités rationnelles, si les quantités dont on doit extraire les racines sont les mêmes. Ainsi, $\sqrt{a}+\sqrt{a}=2\sqrt{a}$; $m\sqrt{a}+n\sqrt{a}=(m+n)\sqrt{a}$: $3\sqrt{a}-2\sqrt{a}=\sqrt{a}$; $m\sqrt{a}-n\sqrt{a}=(m-n)\sqrt{a}$.

On se contente d'indiquer ces opérations, si les quantités sous le signe radical sont différentes. Ainsi, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ et $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, indiquent l'addition et la soustraction qu'on se propose de faire de $\sqrt{a}$ et de $\sqrt{b}$.

La multiplication de deux racines carrées, se fait, en mettant sous le signe radical le produit des deux quantités dont on doit multiplier les racines ; savoir : $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$. En effet, soit $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=p$; ou, $\sqrt{a}=\frac{p}{\sqrt{b}}$; prenant les carrés, $a=\frac{pp}{b}$; et $pp=ab$; de là, $p=\sqrt{ab}$. Ainsi, $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$; $\sqrt{3}\times\sqrt{5}=\sqrt{15}$.

Quand on a une fraction dont le dénominateur est affecté du signe radical, il convient de le chasser du dénominateur, et de rendre ce dénominateur rationnel. Pour cela, si le dénominateur est monome, on multiplie les deux termes de la fraction par le dénominateur; ainsi, $\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$; $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$.

Si le dénominateur et composé de deux parties jointes par les signes de l'addition ou de la soustraction, on multiplie les deux termes de la fraction par une quantité composée des mêmes termes joints, au contraire, par les signes de la soustraction ou de l'addition; et on rend par là le dénominateur rationnel. En effet, puisque $(a+b)(a-b)=aa-bb$ (§ 29) ; $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$. Soit donc la

fraction $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, on lui donnera un dénominateur rationnel en multipliant ses deux termes par $\sqrt{a}-\sqrt{b}$; on aura $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$; de même; $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$, en multipliant les deux termes par $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

Ex: $\frac{\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}+1)(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}=5+3\sqrt{3}$;

$$\frac{\sqrt{5}+1}{3-2\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{5}+1)(3+2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}=3+2\sqrt{10}+3\sqrt{5}+2\sqrt{2}.$$

Ce procédé s'applique au cas où le dénominateur est affecté de deux ou de plusieurs radicaux.

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{a+b-c+2\sqrt{ab}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab}.$$

§ 78. Quoique l'usage des fractions décimales soit celui qui se présente le plus naturellement pour approcher des quantités irrationnelles, les fractions ordinaires s'appliquent aussi avec succès à cette approximation, et y conduisent souvent plus promptement que les fractions décimales. Je vais éclaircir cette assertion par un petit nombre d'exemples.

Soit $\sqrt{2}=1+\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x}=\sqrt{2}-1$; $x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1=2+\frac{1}{x'}$

$\frac{1}{x'}=\sqrt{2}-1=\frac{1}{x}$.

On obtient pour $\sqrt{2}$ l'expression fractionnaire $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}$ de là, on tire les approximations suivantes $1+(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}; \frac{5}{12}, \frac{12}{29}, \frac{29}{70}, \frac{70}{169} \ldots)$; les nombres, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, sont tels, que chacun d'eux est la somme du double de celui qui le précède et du pénultième; et les fractions $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$, $\frac{239}{169}$.... sont telles, que les carrés de leurs numérateurs diffèrent d'une unité du double des carrés de leurs dénominateurs, alternativement en plus et en moins.

Soient a, b, c, trois termes successifs de la suite, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169....

Qu'il ait été prouvé que $\left(1+\frac{a}{b}\right)^2=2\pm\frac{1}{bb}$, ou, $(b+a)^2=2bb\pm1$.

J'affirme que $\left(1+\frac{b}{c}\right)^2=2\mp\frac{1}{cc}$, ou $(c+b)^2=2cc\mp1$.

En effet, puisque $c=2b+a$, $a=c-2b$; $b+a=c-b$; donc on suppose $(c-b)^2=2bb\pm1$; ou $cc-2bc=bb\pm1$; et $cc\mp1=bb+2bc$.

En ajoutant à chaque membre cc on a $2cc\mp1=cc+2bc+bb=(c+b)^2$.

Je vais comparer les approximations obtenues par les fractions ordinaires avec l'approximation obtenue par les fractions décimales calculées jusqu'aux 10 000 000^{mes}.

$$\sqrt{2}=1,414\,213\,6.$$

$\frac{3}{2}=1,5$	$\frac{7}{5}=1,4$
$\frac{17}{12}=1,416\,666\,7$	$\frac{41}{29}=1,413\,793\,1$
$\frac{99}{70}=1,414\,285\,7$	$\frac{239}{169}=1,414\,201\,2$
$\frac{577}{408}=1,414\,215\,6$	$\frac{1393}{985}=1,414\,213\,2$

2d. *Ex.* $\sqrt{5}=2+\frac{1}{x};\ \frac{1}{x}=\sqrt{5}-2;\ x=\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\sqrt{5}+2=4+\frac{1}{x'}.$

$$\frac{1}{x'}=\sqrt{5}-2=\frac{1}{x};\ x'=x.$$

$$\sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+}}}}=2+\left(\frac{1}{4},\frac{4}{17},\frac{17}{72},\frac{72}{305}\ldots\ldots\right)$$
$$=2,\ \frac{9}{4},\ \frac{38}{17},\ \frac{161}{72},\ \frac{682}{305}.$$

Dans la suite, 1, 4, 17, 72, 305 ...... ; chaque terme est la somme du quadruple de celui qui le précède et du penultième simple.

$$2^2=5\times1-1;\quad 9^2=5\times4^2+1.$$
$$38^2=5\times17^2-1;\ 161^2=5\times72^2+1;$$
$$682^2=5\times305^2-1,\ldots\ldots$$

J'affirme que cette loi a toujours lieu.

Soient a, b, c, trois termes de la suite ;

1, 4, 17, 72, 305 .... ; qu'on ait prouvé que $\left(2+\frac{a}{b}\right)^2=5\pm\frac{1}{bb}$; ou $(2b+a)^2=5bb\pm1$; j'affirme que $\left(2+\frac{b}{c}\right)^2=5\mp\frac{1}{cc}$; ou $(2c+b)^2=5cc\mp1$.

En effet, puisque $c=4b+a$; $a=c-4b$; $2b+a=c-2b$; donc, on suppose $(c-2b)^2=5bb\pm1$; ou $cc-4bc=bb\pm1$; $cc\mp1=bb+4bc$; $5cc\mp1=bb+4bc+4cc=(b+2c)^2$.

$$\sqrt{5}=2{,}236\,068$$

$$2=2$$

$$\tfrac{38}{17}=2{,}235\,294 \qquad \tfrac{9}{4}=2{,}25.$$

$$\tfrac{682}{305}=2{,}236\,061 \qquad \tfrac{161}{72}=2{,}236\,111.$$

3e. *Ex.* $\sqrt{3}=1+\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x}=\sqrt{5}-1$; $x=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1+\frac{1}{x'}$

$$\frac{1}{x'}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\ ;\ x'=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1=2+\frac{1}{x''}$$

$$\frac{1}{x''}=\sqrt{3}-1=\frac{1}{x}.\quad x''=x.$$

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}}}=1+\left(1,\tfrac{2}{3},\tfrac{3}{4},\tfrac{8}{11},\tfrac{11}{15},\tfrac{30}{41},\ldots\right)=1,\ 2,\tfrac{5}{3},\tfrac{7}{4},\tfrac{19}{11},\tfrac{26}{15},\tfrac{71}{41}\ldots$$

On obtient une suite plus promptement convergente, en faisant

$$\sqrt{3}=2-\frac{1}{x};\ \frac{1}{x}=2-\sqrt{3};\ x=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}=4-\frac{1}{y}.$$

$$\frac{1}{x'}=2-\sqrt{3}=\frac{1}{x};\ x'=x.$$

$$\sqrt{3}=2-\left(\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-}}}\right.\quad \begin{aligned}&=2-\left(\tfrac{1}{4},\ \tfrac{4}{15},\ \tfrac{15}{56},\ \tfrac{56}{209},\ \tfrac{209}{780}\ldots\right.\\ &=2,\ \tfrac{7}{4},\ \tfrac{26}{15},\ \tfrac{97}{56},\ \tfrac{362}{209},\ \tfrac{1351}{780}\ldots\\ &\ldots\ldots\end{aligned}$$

$$2^2=3\times\ 1+1;\qquad 7^2=3\times\ 4^2\times 1.$$
$$26^2=3\times\ 15^2+1;\qquad 97^2=3\times\ 56^2+1.$$
$$362^2=3\times 209^2+1;\quad 1351^2=3\times 780^2+1.$$

Dans la suite, 1, 4, 15, 56, 209, 780 .... chaque terme est l'excès du quadruple de celui qui le précède sur le pénultième.

Soient a, b, c, trois termes successifs de cette suite; qu'il ait été prouvé que $\left(2-\frac{a}{b}\right)^2=3+\frac{1}{bb}$ ou $(2b-a)^2=3bb+1$; j'affirme que $\left(2-\frac{b}{c}\right)^2=3+\frac{1}{cc}$; ou $(2c-b)^2=3cc+1$.

En effet, puisque $c=4b-a$; $a=4b-c$; $2b-a=c-2b$; on suppose donc $(c-2b)^2=3bb+1$, ou $cc-4bc+bb=1$; de là, $4cc-4bc+bb=3cc+1$; ou $(2c-b)^2=3cc+1$.

$$\sqrt{3}=1{,}732\,050\,8.$$

$2=2$ $\qquad\qquad$ $\frac{7}{4}=1,\ 75.$

$\frac{26}{15}=1{,}733\,333\,3$; $\qquad$ $\frac{97}{56}=1{,}732\,142\,8.$

$\frac{362}{209}=1{,}732\,057\,4$; $\qquad$ $\frac{1351}{780}=1{,}732\,051\,3.$

§ 79. La composition du carré d'un binome, sert aussi de base à l'extraction de la racine carrée des quantités littérales.

Soit proposé le trinome $aa+2ab+bb$ dont on doit extraire la racine. On commence (comme dans la division) par disposer ou ordonner ses termes, suivant une de ses lettres, telle que a. Soit cherché la racine carrée a du premier terme aa; soit retranché le carré; soit divisé le second terme $2ab$ par le double $2a$ de la racine trouvée, le quotient est b; soit multiplié la somme $2a+b$ du diviseur et du quotient par le quotient b, on obtient $2ab+bb$, qui est égal à la partie restante de la quantité proposée. Donc, la racine cherchée est $a+b$.

Tableau de l'opération

$$\begin{array}{rr|l} & aa+2ab+bb & a+b \\ & aa & \\ \hline 2a+b) & 2ab+bb & \\ & 2ab+bb & \\ \hline & 0. & \end{array}$$

Aut. exemp.

$$\begin{array}{rr|l} & aa-2ab+bb & a-b \\ & aa & \\ \hline 2a-b) & -2ab & \\ & -2ab+bb & \\ \hline & 0. & \end{array}$$

$$4aa+12ab+9bb\ \{2a+3b$$
$$4aa$$
$$(4a+3b)\quad 12ab$$
$$12ab+9bb$$
$$0.$$

$$aa+4ab+6ac+4bb+12bc+9cc\ \{a+2b+3c$$
$$aa$$
$$(2a+2b+3c)\quad 4ab+6ac$$
$$4ab+6ac+4bb+12bc+9cc$$
$$0.$$

Lorsqu'on ne peut pas obtenir exactement la racine carrée d'une quantité littérale proposée, on emploie des moyens d'approximation que ce n'est pas ici le lieu de développer.

La démonstration que j'ai donnée du lemme fondamental de la doctrine des incommensurables (§ 75), me paroît plus simple et plus lumineuse qu'aucune de celles qui sont parvenues à ma connoissance. Je la dois, à la sagacité de mon savant collègue, le Prof. MAURICE, l'un des examinateurs des aspirans à l'admission dans l'Ecole polytechnique.

CHAPITRE VII.

Problèmes du second degré.

§80. LES équations du second degré les plus simples sont celles qui renferment seulement le carré de l'inconnue, et qui, en conséquence, se réduisent à la suivante, $axx-b=0$. Ces équations sont appelées *pures*. Leur solution diffère de celle des équations du premier degré, dont la forme est $ax-b=0$; en tant qu'elle exige l'extraction de la racine carrée des quantités connues. En effet, de l'équation $axx-b=0$, on tire $axx=b$, $xx=\frac{b}{a}$; et $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$.

Soit $\frac{b}{a}=cc$; ou soit l'équation $xx-cc=0$; comme $xx-cc=(x-c)(x+c)$, on a $(x-c)(x+c)=0$. Or, le produit de deux quantités évanouit lorsque l'une ou l'autre de ces deux quantités évanouit; et partant, l'équation $(x-c)(x+c)=0$; peut provenir également, ou, de ce que $x-c=0$, ou de ce que $x+c=0$, ou $x=+c$, $x=-c$.

Ainsi, les équations pures du second degré $xx-cc=0$, diffèrent des équations du premier degré, en ce que leur premier membre $xx-cc$ peut se décomposer dans les deux facteurs $x-c$, $x+c$; de manière que l'équation du second degré $xx-cc=0$, peut être envisagée comme provenant des deux équations du premier degré $\begin{matrix} x-c=0 \\ x+c=0 \end{matrix}$, dont on a multiplié les deux premiers membres l'un par l'autre. Ce qui donne lieu aux deux valeurs de l'inconnue $\begin{matrix} x=c \\ x=-c \end{matrix}$ provenantes des deux équations $\begin{matrix} x-c=o \\ x+c=o \end{matrix}$. On indique ces deux valeurs de x qui satisfont à l'équation $\begin{matrix} xx-cc=o \\ xx=cc \end{matrix}$; de la manière abrégée suivante $x=\pm c$, et chacune des valeurs $\begin{matrix} +c \\ -c \end{matrix}$ de x, est appelée une *racine* de l'équation. Comme les deux racines de l'équation $xx-cc=o$, ne diffèrent que par le signe, nous omettrons le double signe dans la solution du plus grand nombre des équations simples qui vont suivre.

PREMIÈRE SECTION.

Problèmes dont la solution dépend seulement des équations pures du second degré.

§ 81. *Prob.* ON demande un rectangle dont on connoît la surface et le rapport de ses dimensions.

Que les deux dimensions soient entr'elles comme les nombres m et n, et que la surface soit p.

Dén. Côtés du rectangle cherché mx, nx, surface . . . . . . $mnxx$.

Cond. $mnxx=p$.

Réd. $xx=\frac{p}{mn}$; $x=\sqrt{\frac{p}{mn}}$.

Sol.
$$mx=m\sqrt{\frac{p}{mn}}=\sqrt{mm}\times\sqrt{\frac{p}{mn}}=\sqrt{\frac{m}{n}p}.$$
$$nx=n\sqrt{\frac{p}{mn}}=\sqrt{nn}\times\sqrt{\frac{p}{mn}}=\sqrt{\frac{n}{m}p}.$$

$$mnxx=(\sqrt{\frac{m}{n}p})\times(\sqrt{\frac{n}{m}p})=\sqrt{pp}=p \text{ (§ 77).}$$

Ex. Soit $m=2$, $n=1$; $p=50$
$m=3$, $n=2$; $p=216$.

§ 82. *Probl.* Trouver deux nombres dont le rapport est donné, et dont la somme des carrés est aussi donnée.

Soit le rapport donné celui de m à n, et soit q la somme donnée des carrés.

Dén. Nombres cherchés . mx, nx;
Carrés . . . . $mmxx$, $nnxx$.
Somme des carrés, $xx(mm+nn)$.

Cond. $xx(mm+nn)=q$.

Réd. $$xx = q \times \frac{1}{mm+nn}.$$

$$x = \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{(mm+nn)}}.$$

Sol. $$mx = \frac{m\sqrt{q}}{\sqrt{(mm+nn)}};\quad nx = \frac{n\sqrt{q}}{\sqrt{(mm+nn)}}.$$

$$mmxx = \frac{mmq}{mm+nn};\quad nnxx = \frac{nnq}{mm+nn}.$$

Vér. $$mmxx+nnxx = \frac{q(mm+nn)}{mm+nn} = q.$$

Ex. Soit $m=2$, $n=1$, $q=80$
$m=3$, $n=2$, $q=325$.

Aut. exerc. Trouver deux nombres dont on connoît le rapport et la différence des carrés.

§ 83. *Probl.* Trouver trois nombres en connoissant leurs produits deux à deux.

Soient p, p', p'', les produits donnés, du premier par le second, du premier par le

troisième, et du second par le troisième; respectivement.

Cette question est aisément réduite à celle du § 81. En effet, les deux premiers produits sont entr'eux comme le second nombre est au troisième; donc, le second et le troisième nombre sont entr'eux comme les produits donnés p et p', et leur produit p'' est donné.

Dén. Soit le premier nombre x; second nombre, $\frac{p}{x}$, troisième nombre $\frac{p'}{x}$.

Cond. $\frac{p}{x} \times \frac{p'}{x} = p''$.

Réd. $\frac{pp'}{xx} = p''$; $xx = \frac{pp'}{p''} = \frac{pp'p''}{p''^2}$.

Sol. $x = \sqrt{\frac{pp'}{p''}} = \frac{\sqrt{pp'p''}}{p''}$.

$$\frac{p}{x} = p \times \sqrt{\frac{p''}{pp'}} = \sqrt{pp} \times \sqrt{\frac{p''}{pp'}} = \sqrt{\frac{pp''}{p'}} = \frac{\sqrt{pp'p''}}{p'}.$$

$$\frac{p'}{x} = p' \times \sqrt{\frac{p''}{pp'}} = \sqrt{p'p'} \times \sqrt{\frac{p''}{pp'}} = \sqrt{\frac{p'p''}{p}} = \frac{\sqrt{pp'p''}}{p}.$$

$$\frac{p}{x} \times \frac{p'}{x} = \frac{pp'p''}{pp'} = p''.$$

Autrem. Soient les nombres cherchés x, y, z.

Cond. $\begin{cases} xy = p \\ xz = p' \\ yz = p''. \end{cases}$

Réd. $p : p' = y : z = yy : zy = yy : p'' = yz : zz = p'' : zz$.

$yy = \frac{pp''}{p'}$; $zz = \frac{p'p''}{p}$; $xx = \frac{pp'}{p''}$; comme précédemment.

Le carré de chacune des quantités cherchées est égal au produit des deux produits dont elle est facteur, divisé par le produit dont elle n'est pas facteur.

Ex. Soient $p=12$, $p'=15$, $p''=20$
$p=20$, $p'=24$, $p''=30$.

Rem. Soit proposé le problème suivant : trouver quatre nombres x, y, z, v, en connoissant les produits

Du premier par le second . . . . p.
Du second par le troisième . . . p'.
Du troisième par le quatrième . . p''.
Et du quatrième par le premier . . p'''.

Ce problème peut paroître au premier coup-d'œil de la même nature que le précédent ; cependant, il est impossible ou indéterminé.

En effet, le rapport du premier nombre au troisième est égal au rapport de p à p', en tant que leurs produits par le second sont égaux respectivement à p et à p' ; et le rapport du premier nombre au troisième est aussi

égal au rapport de p''' à p'', en tant que leurs produits par le quatrième sont égaux respectivement à p''' et à p''. Partant, pour que le problème soit possible on doit avoir $p:p'=p''':p''$; et lorsque cette proportion a lieu le problème est indéterminé.

Autrem. Le produit de p par p'' et le produit de p' par p''' sont l'un et l'autre égaux au produit continuel des quatre nombres cherchés; partant, les conditions données sont dépendantes les unes des autres, et le problème est indéterminé.

Les problèmes analogues sur des quantités en nombre impair, sont déterminés, et les questions analogues sur des quantités en nombre pair, sont impossibles ou indéterminées.

Ex. 1°. Soient les produits xy, yz, zv, vt, tx, respectivement . . . . . $p, p', p'', p''', p^{\text{IV}}$;

$$p:p'=x:z=vx:vz=vx:p''; \text{ donc, } vx=\frac{pp''}{p'}.$$

Mais, $v:x=p''':p^{\text{IV}}$. Donc (§81.), les valeurs de xx, vv, tt, yy, zz, sont respectivement

$$\frac{pp''p^{\text{IV}}}{p'p'''}, \frac{pp''p'''}{p'p^{\text{IV}}}, \frac{p'p'''p^{\text{IV}}}{pp''}, \frac{pp'p'''}{p''p^{\text{IV}}}, \frac{p'p''p^{\text{IV}}}{pp'''}.$$

2°. Soient $\begin{matrix} xy, & yz, & zv, & vt, & tr, & rx \\ p, & p', & p'', & p''', & p^{\text{IV}}, & p^{\text{V}} \end{matrix}$, respect.

$p:p'$

$$p : p' = x : z = vx : vz = vx : p''$$
$$p^{IV} : p^{V} = t : x = vt : vx = p''' : vx$$

Donc, $pp^{IV} : p'p^{V} = p''' : p''$, et $pp''p^{IV} = p'p'''p^{V}$.

En effet, $xyzvtr = pp''p^{IV}$
$yzvtrx = p'p'''p^{V}$

Aut. exerc. On demande trois nombres, en connoissant les produits de l'un d'entr'eux par chacun des deux autres, et la somme ou la différence des carrés des deux derniers.

§ 84. *Probl.* Trouver trois nombres, en connoissant chacun des quotiens qu'on obtient, en divisant chacun des produits de deux d'entr'eux par le troisième.

Soient x, y, z, les trois nombres cherchés, et soient q, q', q'', les trois quotiens donnés. On aura :

Cond. $\frac{xy}{z} = q$

$$\frac{xz}{y} = q'.$$

$$\frac{yz}{x} = q''.$$

Réd. Prenant les produits des membres de ces équations deux à deux, on obtient

$$xx = qq', \quad yy = qq'', \quad zz = q'q''.$$

Sol. $x=\sqrt{qq'}$, $y=\sqrt{qq''}$, $z=\sqrt{q'q''}$

$xy=q\sqrt{q'q''}$, $xz=q'\sqrt{qq''}$, $yz=q''\sqrt{qq'}$.

Vér. $\frac{xy}{z}=q$; $\frac{xz}{y}=q'$; $\frac{yz}{x}=q''$.

Ex. $q=12$, $q'=27$, $q''=48$.

§ 85. *Probl.* Trouver trois nombres en connoissant le produit de chacun d'eux par la somme des deux autres.

Soient p, p', p'' les trois produits donnés.

Dén. Soient x, y, z les trois nombres cherchés.

$$\textit{Cond.}\quad \begin{aligned} x(y+z) &= p \\ y(x+z) &= p' \\ z(x+y) &= p''. \end{aligned}$$

$$\textit{Réd.}\quad \begin{aligned} xy+xz &= p \\ xy+yz &= p'. \\ xz+yz &= p'' \end{aligned}$$

Regardant les produits xy, xz, yz, comme trois quantités cherchées, le problème est réduit au problème du premier degré, contenu dans les §§ 7 et 28; on connoîtra donc les produits des quantités cherchées prises deux à deux; et de là, par le § 83, on connoîtra chacune de ces quantités.

On obtient, $xy+xz+yz=\frac{1}{2}(p+p'+p'')$
$$xy=\tfrac{1}{2}(p+p'-p'')$$
$$xz=\tfrac{1}{2}(p-p'+p'')$$
$$yz=\tfrac{1}{2}(-p+p'+p'').$$

De là,
$$xx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(p+p'-p'')(p-p'+p'')}{-p+p'+p''}$$
$$yy=\frac{1}{2}\cdot\frac{(p+p'-p'')(-p+p'+p'')}{p-p'+p''}$$
$$zz=\frac{1}{2}\cdot\frac{(p-p'+p'')(-p+p'+p'')}{p+p'-p''}.$$

Ex. Soient $p=16;\ p'=21;\ p''=25;$
$p=27,\ p'=32,\ p''=35.$

Rem. La question suivante, trouver trois nombres en connoissant le produit de chacun d'eux par la différence des deux autres, est ou indéterminée ou impossible.

En effet, soient les trois équations,
$$x(y-z)=p \qquad xy-xz=p$$
$$y(x-z)=p' \quad \text{ou} \quad xy-yz=p'$$
$$z(x-y)=p'' \qquad \phantom{xy-{}}xz-yz=p''.$$

Regardant les produits, xy, xz, yz, comme trois inconnues, on demande trois quantités en connoissant leurs différences deux à deux, laquelle question est indéterminée ou impossible (§ 28).

Autr. exerc. Trouver trois nombres en connoissant le produit de l'un d'eux par la somme des deux autres, et en connoissant chacun des produits de ces derniers, par la différence du premier à chacun d'eux.

§ 86. *Probl.* Trouver deux nombres dont on connoît la différence et le produit.

On a vu (§ 27.) que deux quantités sont déterminées par leur somme et par leur différence, de manière que la grande vaut la demi-somme plus la demi-différence, et que la petite vaut la demi-somme moins la demi-différence. Partant, connoissant la différence de deux quantités, si on peut trouver leur somme, on connoîtra l'une et l'autre.

Soit donc, $2d$ la différence donnée de deux quantités, et soit p leur produit donné.

Dén. Somme cherchée des deux quantités . . . . $2s$, quantités cherchées . . . . $\begin{matrix} s+d \\ s-d \end{matrix}$ produit $ss-dd$.

Cond. $ss-dd=p$.

Réd. $ss \quad =p+dd$.

Sol. $s=\sqrt{(p+dd)}$; $\begin{matrix} s+d=\sqrt{(p+dd)}+d \\ s-d=\sqrt{(p+dd)}-d \end{matrix}$

$ss-dd=(p+dd)-dd=p$.

Ex. $d=3$; $\quad p=91$;
$d=4 \quad p=128$.

Rem. L'expression du produit $ss-dd$, nous apprend que le produit de deux quantités est égal à l'excès du carré de leur demi-somme sur le carré de leur demi-différence; et que, par conséquent, le carré de la demi-somme est égal à la somme du produit et du carré de la demi-différence.

§ 87. Trouver deux nombres dont on connoît la somme $2s$, et le produit p.

Dans l'équation du § précédent, $ss-dd=p$, on suppose que s et p sont connus; partant, on obtient $dd=ss-p$; et $d=\sqrt{(ss-p)}$.

$$\begin{matrix} s+d=s+\sqrt{(ss-p)} \\ s-d=s-\sqrt{(ss-p)} \end{matrix} \quad ss-dd=ss-(ss-p)=p.$$

Ex. Soit $\begin{matrix} s=10, & p=91 \\ s=12, & p=119 \end{matrix}$.

Rem. 1[re]. Puisque le produit de deux quantités est égal à l'excès du carré de leur demi-somme sur le carré de leur demi-différence, le produit de deux quantités n'est pas plus grand que le carré de leur demi-somme. Savoir, si elles sont égales entr'elles, leur produit qui est le carré de l'une d'elles, est égal au carré de leur demi-somme; et si elles sont inégales, leur produit est plus petit que le carré de leur demi-somme.

Rem. 2de. Partant, pour que le problême soit possible, le produit donné ne doit pas être plus grand que le carré de la demi-somme donnée.

Or, lorsque ce produit est donné plus grand que le carré de la demi-somme, dans l'expression de la demi-différence, $d = \sqrt{(ss-p)}$, la quantité sous le signe radical est négative; partant, l'impossibilité de la question est indiquée par le signe de l'extraction de la racine carrée d'une quantité négative.

En effet, puisque le produit de deux quantités précédées du même signe, est toujours positif, soit que ce signe soit celui de l'addition, soit qu'il soit celui de la soustraction, il est impossible qu'une quantité négative puisse être envisagée comme un carré; et partant, l'extraction de la racine carrée d'une quantité négative, est absurde.

On peut présenter cette impossibilité d'une autre manière non moins lumineuse. Soit le binome $xx-cc$; il peut être décomposé dans les deux facteurs du premier degré $x-c$, $x+c$. Je dis, au contraire, que le binome $xx+cc$ ne peut pas être décomposé en facteurs du premier degré.

En effet, deux binomes du premier degré

dont on prend le produit, sont, ou l'un et l'autre la somme de leurs termes, ou l'un d'eux est la somme de ses termes, et l'autre, en est la différence; ou ils sont, l'un et l'autre, la différence de leurs termes. On a donc, les trois formes suivantes; $(x+a)(x+b)$, $(x+a)(x-b)$, $(x-a)(x-b)$; la forme $(x-a)(x+b)$ étant la même que la seconde.

$$\begin{aligned}\text{Or, } (x+a)(x+b)&=xx+x(a+b)+ab\\ (x+a)(x-b)&=xx+x(a-b)-ab\\ (x-a)(x-b)&=xx-x(a+b)+ab.\end{aligned}$$

Que dans ces produits le second terme évanouisse, on aura dans le second cas $a=b$; et dans le premier et le troisième cas $a=-b$; et partant, dans tous les cas le produit est de la forme $xx-ab$; donc le produit $xx+ab$ ne peut pas être décomposé en facteurs du premier degré.

Dans l'équation du problème précédent $dd=ss-p$ ou $dd-(ss-p)=0$, aussi long-tems que $ss>p$, on peut décomposer le premier membre dans les facteurs $d+\sqrt{(ss-p)}$, et $d-\sqrt{(ss-p)}$, dont chacun étant égalé à zéro, donne $d=\mp\sqrt{ss-p}$).

Mais, lorsque $ss<p$, on a $dd+(p-ss)=0$; qui ne peut pas se décomposer en facteurs du premier degré. R 4

Cependant, on a contraint (si je puis m'exprimer ainsi) la nature des choses, en décomposant en facteurs une quantité qui, par sa nature, ne peut pas être décomposée : lorsque $p > ss$; $ss-p = -(p-ss)$; et $\sqrt{(ss-p)} = \sqrt{(-(p-ss))}$. Or, $-(p-ss) = -1 \times (p-ss)$; donc, $\sqrt{(ss-p)} = \sqrt{(p-ss)} \times \sqrt{-1}$. Et les deux facteurs impossibles de $dd+(p-ss)$ sont $d+\sqrt{(p-ss)}\sqrt{-1}$, et $d-\sqrt{(p-ss)}\sqrt{-1}$; d a les deux valeurs impossibles, $\begin{matrix} +\sqrt{(p-ss)}\sqrt{-1} \\ -\sqrt{(p-ss)}\sqrt{-1} \end{matrix}$; et les deux quantités cherchées (encore ainsi nommées) sont $\begin{matrix} s+\sqrt{(p-ss)}\sqrt{-1} \\ s-\sqrt{(p-ss)}\sqrt{-1} \end{matrix}$.

Quoique ces deux expressions soient de simples signes algébriques auxquels ne peut répondre aucune idée de quantités réelles, elles satisfont cependant à la question, quant aux deux conditions que leur somme est $2s$ et que leur produit est p, parce que les termes affectés du signe de l'impossibilité $\sqrt{-1}$, se détruisent mutuellement, soit dans cette somme, soit dans ce produit.

Les problèmes du second degré donnent donc lieu à un genre d'expressions (qu'on a continué d'appeler quantités) auxquelles ne

peuvent donner lieu les questions du premier degré; savoir : à l'introduction du signe de l'impossibilité de la question proposée, relatif à l'extraction de la racine carrée d'une quantité négative. Cette introduction a lieu dans toutes les questions dans lesquelles quelqu'une des quantités énoncées dans les conditions, est déterminée par les autres quantités données, à être contenue entre certaines limites : si cette quantité est donnée en n'ayant pas égard à ces limites, et en les outrepassant, la question est impossible, et l'extraction de la racine carrée d'une quantité négative avertit de cette impossibilité et de l'erreur commise dans l'énoncé.

Ainsi, dans la question précédente, lorsque la somme de deux quantités est donnée, leur produit croît depuis la valeur o d'une de ces quantités jusqu'à ce qu'elle soit égale à leur demi-somme ou à l'autre de ces deux quantités; et la première de ces quantités, continuant de croître jusqu'à ce qu'elle soit égale à la somme donnée, leur produit décroît depuis sa valeur, lorsque les deux quantités sont égales, jusqu'à zéro. Le carré de la demi-somme donnée est donc une limite en grandeur que le produit donné ne peut

surpasser: le problème est impossible toutes les fois que le produit est assigné plus grand que ce carré, et cette impossibilité est assignée algébriquement par l'introduction de l'extraction de la racine carrée d'une quantité négative.

Il est important de remarquer que cette idée d'impossibilité est unique, et qu'on ne peut pas dire que la question est plus ou moins impossible, suivant que le produit, assigné plus grand que sa limite en grandeur, diffère plus ou moins de cette limite. L'algèbre indique cette unité d'idée, en réduisant son signe à celui de $\sqrt{-1}$ seulement. En effet, lorsque $xx=-cc$; $xx=-1\times cc$; et $x=c\sqrt{-1}$. Partant, s'il étoit possible de se faire une idée de $\sqrt{-1}$, on se feroit aussi une idée de toute autre expression telle que $\sqrt{-a}$, ou cette dernière est réduite à la première.

Les expressions $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-a}$, étant le signe de l'impossibilité, et ne pouvant répondre à aucune quantité réelle, on leur a donné le nom d'*imaginaires*. On a continué de les appeler *quantités* et de les traiter comme telles, et on a exécuté sur elles toutes les opérations qu'on exécute sur les signes des quantités réelles.

Ainsi, $\sqrt{-a}+\sqrt{-b}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{-1}$
$\sqrt{-a}-\sqrt{-b}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{-1}$.

Puisque $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$
et $\sqrt{-b}=\sqrt{b}\times\sqrt{-1}$:

$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$;
mais $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$, et $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$;
donc, $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}$ (1).

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{a}\times\sqrt{-1}}{\sqrt{b}\times\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}},$$

mais, $\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=1$; donc, $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

$$(\sqrt{a}+\sqrt{-b})(\sqrt{c}+\sqrt{-d})$$
$$=\sqrt{a}\times\sqrt{c}+\sqrt{a}\times\sqrt{-d}+\sqrt{c}\times\sqrt{-b}+\sqrt{-b}\times\sqrt{-d}$$
$$=\sqrt{ac}+(\sqrt{ad}+\sqrt{bc})\sqrt{-1}-\sqrt{bd}.$$

En particulier $(\sqrt{a}+\sqrt{-b})^2=a+2\sqrt{ab}\times\sqrt{-1}-b$

Quoique le signe $\sqrt{-a}$ soit un simple symbole algébrique, auquel ne peut répondre aucune quantité réelle, son introduction facilite souvent des calculs, et les ramène à un degré d'uniformité qu'il eût été quelquefois difficile

---

(1) Je crois devoir relever une inadvertance dans l'Algèbre d'EULER, § 148, Ier vol.; où il est dit, que $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}=\sqrt{6}$, au lieu de $-\sqrt{6}$; et $\sqrt{-1}\times\sqrt{-4}=2$, au lieu de -2.

d'obtenir sans cette introduction; mais, si l'introduction de ce signe conduit à des résultats réels, c'est que dans ses combinaisons soit avec lui-même, soit avec des quantités réelles, ce signe se détruit, parce qu'il se trouve en même nombre précédé de signes opposés. Ainsi, la somme des deux quantités imaginaires $a+b\sqrt{-1}$, $a-b\sqrt{-1}$, donne la somme réelle $2a$; la différence des deux quantités $a+b\sqrt{-1}$, $c+b\sqrt{-1}$, donne le résultat réel $a-c$; le produit $(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})$ est $aa+bb$, parce que deux produits imaginaires $ab\sqrt{-1}$, sont précédés de signes opposés; et enfin le quotient $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ est égal au quotient réel $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, parce que le signe $\sqrt{-1}$ entre comme facteur commun dans les deux termes.

§ 88. *Probl.* Trouver deux nombres dont on connoît la somme $2s$, et la somme des carrés $2q$.

Dén. Différence des nombres cherchés $2d$;

nombres cherchés $\begin{matrix} s+d \\ s-d \end{matrix}$ carrés $\begin{matrix} ss+2ds+dd \\ ss-2ds+dd \end{matrix}$,

Somme des carrés . . . $2ss \quad +2dd$.

Cond. $2ss+2dd=2q$.

Réd. $dd=q-ss$.

Sol. $d=\sqrt{(q-ss)}$; $\begin{matrix} s+d=s+\sqrt{(q-ss)} \\ s-d=s-\sqrt{(q-ss)} \end{matrix}$.

$$(s+d)^2=q+2s\sqrt{(q-ss)}$$
$$(s-d)^2=q-2s\sqrt{(q-ss)}$$

$$(s+d)^2+(s-d)^2=2q.$$

Exemples. $\begin{matrix} s=6, & 10. \\ q=37, & 109. \end{matrix}$

Rem. 1re. La formule $2ss+2dd$, de la somme des carrés des deux quantités cherchées, apprend que la somme des carrés de deux quantités vaut le double de la somme des carrés de leur demi-somme et de leur demi-différence.

Rem. 2de. Partant, la demi-somme des carrés de deux quantités inégales est plus grande que le carré de leur demi-somme; ou la plus petite valeur de la demi-somme des carrés de deux quantités, est le carré de leur demi-somme.

Rem. 3me. Dans la formule $d=\sqrt{(q-ss)}$, si $q \geqq ss$, la question est possible, ou les quantités cherchées sont réelles. Mais, si $q<ss$, l'impossibilité de la question est indiquée par l'extraction de la racine carrée d'une quantité négative.

Rem. 4^{me}. De l'équation $ss+dd=q$; on tire $s=\sqrt{(q-dd)}$: $\begin{matrix} s+d=\sqrt{(q-dd)}+d \\ s-d=\sqrt{(q-dd)}-d \end{matrix}$ et on résout la question. Trouver deux nombres dont on connoît la différence et la somme des carrés.

Rem. 5^{me}. Quant aux deux problèmes, trouver deux nombres dont on connoît la somme ou la différence et la différence des carrés, ils sont du premier degré, vu que la différence des carrés de deux nombres est égale au produit de leur somme par leur différence.

Aut. exerc. Trouver deux nombres dont on connoît la somme ou la différence, et la somme ou la différence de la somme de leur carrés et de leur produit; et plus généralement de la quantité qui a un rapport donné à leur produit.

§ 89. *Prob.* Trouver deux nombres dont on connoît la somme $2s$, et la somme des cubes ou troisièmes puissances $2q$.

Lemme. $\begin{matrix} (a+b)^3=a^3+3aab+3abb+b^3. \\ (a-b)^3=a^3-3aab+3abb-b^3. \end{matrix}$

Partant, $(a+b)^3+(a-b)^3=2a^3+6abb$.

Dén. Différence cherchée des deux nombres $2d$.

Nombres cherchés . . . . . . $\begin{matrix} s+d \\ s-d \end{matrix}$

Cubes . . . . . $\begin{matrix} s^3+3ssd+3sdd+d^3 \\ s^3-3ssd+3sdd-d^3 \end{matrix}$

Somme des cubes $2s^3 \qquad +6sdd$.

Cond. $2s^3+6sdd=2q$.

Réd. $s^3+3sdd=q$; $3sdd=q-s^3$; $dd=\frac{1}{3}(\frac{q}{s}-ss)$.

Sol. $d=\pm\sqrt{(\frac{q-s^3}{3s})}$; $s+d=s\pm\sqrt{(\frac{q-s^3}{3s}}$.

$$s-d=s\mp\sqrt{(\frac{q-s^3}{3s})}.$$

$$(s+d)^3=s^3+3ss\sqrt{\frac{q-s^3}{3s}}+q-s^3+\frac{q-s^3}{3s}\sqrt{\frac{q-s^3}{3s}}$$

$$=q+\frac{q+8s^3}{3s}\sqrt{(\frac{q-s^3}{3s})}.$$

$$(s-d)^3=q-\frac{q+8s^3}{3s}\sqrt{(\frac{q-s^3}{3s})}$$

$$(s+d)^3+(s-d)^3=2q.$$

Rem. Pour que le problème soit possible, $q \geqq s^3$; et partant, la plus petite valeur de q est d'être égale à s^3 : alors, les deux nombres sont égaux; et la somme $2s$ de deux nombres étant donnée, la somme des cubes des deux parties inégales de cette somme $\begin{matrix} s+d \\ s-d \end{matrix}$

surpasse la somme des cubes des deux parties égales, de $6sdd$, ou de trois fois le produit de la somme des deux nombres par le carré de leur demi-différence.

Exemples. Soient $2s = 16, \quad 20, \quad 24.$
$2q = 1072, \; 2240, \; 4408.$

Aut. Prob. Trouver deux nombres dont on connoît la différence $2d$, et la différence des cubes $2q$.

Rem. Les deux problèmes suivans conduisent à des équations supérieures à celles du second degré.

1°. Trouver deux nombres dont on connoît la somme et la différence des cubes.

2°. Trouver deux nombres dont on connoît la différence et la somme des cubes.

§ 90. Les problèmes contenus dans les §§ 86 et 88, auroient pu être résolus d'une manière un peu différente, en introduisant deux inconnues.

1°. Soit $\begin{matrix} x+y=2s \\ xy=p. \end{matrix}$ Soient carrés les membres de la première équation, et soient quadruplés les membres de la seconde; on obtient $\begin{matrix} xx+2xy+yy=4ss \\ 4xy \quad =4p \end{matrix}$. Des membres de la

la première équation soient retranchés ceux de la seconde, on obtient, $xx-2xy+yy=4ss-4p$, ou $(x-y)^2=4(ss-p)$; $x-y=2\sqrt{(ss-p)}$.

Mais, . . $x+y=2s$

Donc, . . $x = s+\sqrt{(ss-p)}$

$y= s-\sqrt{(ss-p)}$.

2°. Soit $x-y=2d$, $xy=p$. $(x-y)^2=xx-2xy+yy=4dd$

$$4xy=4p.$$

$$xx+2xy+yy=4(p+dd);$$

$$x+y=2\sqrt{(p+dd)}$$

$$x-y=2d$$

$$x=\sqrt{(p+dd)}+d.$$

$$y=\sqrt{(p+dd)}-d.$$

3°. Soit $x+y=2s$

$xx+yy=2q$.

$$(x+y)^2=xx+2xy+yy=4ss$$

$$xx+yy=2q$$

$$2xy=4ss-2q.$$

$$xx-2xy+yy=4q-4ss.$$

$$x-y=2\sqrt{(q-ss)}$$

$$x+y=2s$$

$$x=s+\sqrt{(q-ss)}$$

$$y=s-\sqrt{(q-ss)}$$

4°. Soit $x-y=2d$, $(x-y)^2=xx-2xy+yy=4dd$
$xx+yy=2q$ $\quad xx+yy=2q$

$$2xy=2q-4dd$$
$$(x+y)^2=4q-4dd.$$
$$x+y=2\sqrt{(q-dd)}$$
$$x-y=2d$$
$$x=\sqrt{(q-dd)}+d$$
$$y=\sqrt{(q-dd)}-d.$$

§ 91. *Prob.* Trouver deux nombres dont on connoît la somme des carrés q et le produit p.

Dén. Nombres cherchés . . . x et y.

Cond. $\begin{cases} xx+yy=q \\ xy \end{cases}$

Réd. $\begin{cases} xx+yy=q. \\ 2xy=2p. \end{cases}$

Ajoutant et retranchant, $\begin{matrix}(x+y)^2=q+2p \\ (x-y)^2=q-2p\end{matrix}$

$$x+y=\sqrt{(q+2p)}$$
$$x-y=\sqrt{(q-2p)}$$
$$x=\frac{\sqrt{(q+2p)}+\sqrt{(q-2p)}}{2}$$
$$y=\frac{\sqrt{(q+2p)}-\sqrt{(q-2p)}}{2}.$$
$$xx=\frac{2q+2\sqrt{(qq-4pp)}}{4};\ xy=\frac{(q+2p)\cdot(q-2p)}{4}=\frac{4p}{4}=p.$$
$$xx+yy=\frac{4q}{4}=q.$$

Exemples. $\frac{q=74}{p=35}$, $\frac{202}{99}$.

Rem. 1re. Pour que le problème soit possible, on doit avoir $q-2p$ positive, ou $q>2p$. J'affirme que la somme des carrés de deux quantités inégales est plus grande que leur double produit.

En effet, le carré de $a-b$ ou de $b-a$, est $aa-2ab+bb$, indépendant de la majorité ou de la minorité de a, relativement à b, et il est positif; donc, $aa+bb>2ab$.

Autr. Soient deux quantités exprimées dans leur demi-somme et leur demi-différence

$$s+d,\ s-d;\ (s+d)^2+(s-d)^2=2ss+2dd$$
$$2(s+d)(s-d)=2ss-2dd$$
$$(s+d)^2+(s-d)^2-2(s+d)(s-d)=4dd.$$

Ou, l'excès de la somme des carrés de deux quantités sur leur double produit, est égal au carré de leur différence.

Rem. 2de. Chacune des quantités cherchées est exprimée dans deux racines carrées, et chacune de ces racines carrées peut être précédée de chacun des signes + et —; partant, chacune de ces deux quantités paroît avoir quatre valeurs. On a :

$x = \frac{\sqrt{(q+2p)}+\sqrt{(q-2p)}}{2}$; $y = \frac{\sqrt{(q+2p)}-\sqrt{(q-2p)}}{2}$

$= \frac{\sqrt{(q+2p)}-\sqrt{(q-2p)}}{2}$ $= \frac{\sqrt{(q+2p)}+\sqrt{(q-2p)}}{2}$

$= \frac{-\sqrt{(q+2p)}+\sqrt{(q-2p)}}{2}$ $= \frac{-\sqrt{(q-2p)}-\sqrt{(q-2p)}}{2}$

$= \frac{-\sqrt{(q+2p)}-\sqrt{(q-2p)}}{2}$ $= \frac{-\sqrt{(q+2p)}+\sqrt{(q-2p)}}{2}$

Mais de ces quatre valeurs les deux premières alternent entr'elles, et les deux dernières ne diffèrent des deux premières que par le signe.

Rem. 3^{me}. Puisque

$$xx = \frac{q+\sqrt{(qq-4pp)}}{2};\ yy = \frac{q-\sqrt{(qq-4pp)}}{2};$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{q+\sqrt{(qq-4pp)}}{2}\right)};\ y = \sqrt{\left(\frac{q-\sqrt{(qq-4pp)}}{2}\right)};$$

partant, les deux quantités qui se présentoient sous la forme de la somme ou de la différence de deux radicaux, peuvent être ramenées à des racines affectées elles-mêmes de radicaux.

Réciproquement, les quantités radicales $\sqrt{\left(\frac{q+\sqrt{(qq-4pp)}}{2}\right)}$ et $\sqrt{\left(\frac{q-\sqrt{(qq-4pp)}}{2}\right)}$,

peuvent se présenter sous la forme de deux radicaux $\frac{\sqrt{(q+2p)}+\sqrt{(q-2p)}}{2}$ et $\frac{\sqrt{(q+2p)}-\sqrt{(q-2p)}}{2}$.

En général, soit proposé un binome en partie rationnel et en partie irrationnel $a\pm\sqrt{b}$; on demande le caractère auquel on peut reconnoître si on peut en extraire la racine carrée.

Soit $\sqrt{(a\pm\sqrt{b})} = \sqrt{x}\pm\sqrt{y}$;
donc, $a\pm\sqrt{b} = x+y\pm2\sqrt{xy}$.

Egalant la partie rationnelle a à la partie rationnelle $x+y$, et la partie irrationnelle $\sqrt{b}$ à la partie irrationnelle $2\sqrt{xy}$, on aura

$x+y=a$, $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$; de là, $(x+y)^2=aa$
$4xy = b$.
$(x-y)^2=aa-4b$
$x-y = \sqrt{(aa-b)}$.
Mais, $x+y = a$
donc, $x = \frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}$
$y = \frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}$.

Partant, pour que x et y soient des quantités irrationnelles simples, il faut que $aa-b$ soit un carré.

Ex. Soit $a=3$, $b=8$; $aa-b=1$; $x=\frac{3+1}{2}=2$.
$y=\frac{3-1}{2}=1$. $3\pm\sqrt{8}=3\pm2\sqrt{2}=(\sqrt{2}\pm1)^2$.

Soit $a=8$, $b=60$; $aa-b=4$; $x=\frac{8+2}{2}=5$.

$=\frac{8-2}{2}=3$; $8\pm\sqrt{60}=8\pm2\sqrt{15}=(\sqrt{5}\pm\sqrt{3})^2$.

Rem. 4^{me}. Lorsqu'on connoît le rapport de a somme des carrés de deux quantités à leur roduit, on connoît aussi leur rapport.

En effet, soit $xx+yy : xy=q:p$.
Donc aussi, $xx+yy : 2xy=q:2p$.
$xx+2xy+yy : xx-2xy+yy=q+2p:q-2p$.
$(x+y)^2 : (x-y)^2 =q+2p:q-2p$.
$x+y : x-y =\sqrt{(q+2p)}:\sqrt{(q-2p)}$
$x:y=\sqrt{(q+2p)}+\sqrt{(q-2p)}:\sqrt{(q+2p)}-\sqrt{(q-2p)}$.

Partant, si on donne l'une des deux quantités q et p, et partant aussi l'autre, on connoîtra x et y.

§ 92. *Prob.* Trouver deux nombres dont on connoît le produit p et la différence des carrés $2q$.

Dén. Nombres cherchés . . . . x et y.

Cond. $\begin{cases} xx-yy=2q. \\ xy \quad =p. \end{cases}$

Réd. Soient multipliés les membres de la seconde équation par $2\sqrt{-1}$, et soient ajoutés et retranchés les produits aux membres de la première équation. On obtient:

$$xx+2xy\sqrt{-1}-yy=2q+2p\sqrt{-1}=(x+y\sqrt{-1})^2.$$
$$xx-2xy\sqrt{-1}-yy=2q-2p\sqrt{-1}=(x-y\sqrt{-1})^2.$$

De là, $x+y\sqrt{-1}=\sqrt{(2q+2p\sqrt{-1})}$

$x-y\sqrt{-1}=\sqrt{(2q-2p\sqrt{-1})}$

De là, $x=\dfrac{\sqrt{(2q+2p\sqrt{-1})}+\sqrt{(2q-2p\sqrt{-1})}}{2}$

Sol. $y=\dfrac{\sqrt{(2q+2p\sqrt{-1})}-\sqrt{(2q-2p\sqrt{-1})}}{2\sqrt{-1}}.$

$$xx=\frac{4q+2\sqrt{(4qq+4pp)}}{4}=\sqrt{(qq+pp)}+q.$$

$$yy=\frac{4q-2\sqrt{(4qq+4pp)}}{-4}=\sqrt{(qq+pp)}-q.$$

$$xx-yy \qquad = \qquad 2q.$$

$$xy=\frac{(2q+2p\sqrt{-1})-(2q-2p\sqrt{-1})}{4\sqrt{-1}}=\frac{4p\sqrt{-1}}{4\sqrt{-1}}=p.$$

Rem. 1re. Les valeurs de x et de y présentées sous la forme de la somme et de la différence de deux radicaux imaginaires, sont insignifiantes; et l'introduction des quantités imaginaires par le procédé suivi dans la réduction, seroit un moyen illusoire de parvenir à la solution de la question, si les symboles purement algébriques, auxquels cette introduction donne lieu, ne pouvoient être chassés, de manière à obtenir des résultats réels. Or, en prenant les carrés des expressions de x et de y compliquées d'imaginaires, on ob-

tient les résultats positifs $\sqrt{(qq+pp)}+q$ et $\sqrt{(qq+pp)}-q$; partant, on obtient pour les valeurs de x et de y les résultats réels, $\sqrt{(\sqrt{(qq+pp)}+q)}$, $\sqrt{(\sqrt{(qq+pp)}-q)}$; et ces deux racines de quantités affectées d'irrationels, ne peuvent être décomposées en irrationnels simples réels.

Nous verrons, dans la suite, comment on peut développer chacun des irrationnels imaginaires $\sqrt{(2q+2p\sqrt{-1})}$ et $\sqrt{(2q-2p\sqrt{-1})}$, de manière à obtenir séparément les parties réelles et les parties imaginaires qu'elles contiennent, et nous trouverons que leur somme est une quantité réelle; que leur différence est affectée du facteur imaginaire $\sqrt{-1}$; et partant, que l'expression $\frac{\sqrt{(2q+2p\sqrt{-1})}-\sqrt{(2q-2p\sqrt{-1})}}{2\sqrt{-1}}$ est réelle.

Rem. 2[de]. En général, lorsque le rapport de la différence des carrés de deux quantités x et y à leur produit est celui de $2q$ à p, le rapport de ces deux quantités est celui de $\sqrt{(q+p\sqrt{-1})}+\sqrt{(q-p\sqrt{-1})}$ à $\frac{\sqrt{(q+p\sqrt{-1})}-\sqrt{(q-p\sqrt{-1})}}{\sqrt{-1}}$.

Pour ramener ce rapport à des expressions réelles, soient multipliés ses deux termes par $\sqrt{(q+p\sqrt{-1})}+\sqrt{(q-p\sqrt{-1})}$, on obtient

$$x:y=(\sqrt{(q+p\sqrt{-1})}+\sqrt{(q-p\sqrt{-1})})^2:\frac{(q+p\sqrt{-1})-(q-p\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}.$$

$$=2q+2\sqrt{(qq+pp)}:\frac{2p\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=\sqrt{(qq+pp)}+q:p.$$

$$=p\qquad:\sqrt{(qq+pp)}-q.$$

Partant, si on donne quelqu'autre connoissance sur ces deux quantités, on pourra les déterminer par cette nouvelle condition et par leur rapport connu. Par exemple, on aura

$$xx:xy=\sqrt{(qq+pp)}+q:p;$$

et $xy:yy=\quad p\qquad:\sqrt{(qq+pp)}-q.$

Soit $xy\;=\;p.$

$$xx\;=\sqrt{(qq+pp)}+q$$

$$yy=\qquad\sqrt{(qq+pp)}-q.$$

Exemp. Quel est le rapport des nombres dont le produit est les $\frac{2}{3}$ de la différence de leurs carrés; on a donc $p:2q=2:3$; ou $p:q=4:3$.

De là, $x:y=5+3:4=2:1$;

ou $x=2y$,

$$xx=4yy$$

$$xx-yy=3yy,\quad xy=2yy.$$

Donc, $xx-yy:xy=3:2$.

Soit $p:q=3:4$; ou $p:2q=3:8$,

$x:y=5+4:3=3:1.\qquad x=3y,$

$$xx=9yy$$

$$xx-yy=8yy$$

$$xy=3yy.$$

Soit $p=2q$, ou soit cherché le rapport des nombres tels que leur produit est égal à la différence de leurs carrés.

$x:y=\sqrt{5}+1:2.=2:\sqrt{5}-1.$

Le rapport des nombres cherchés est irrationnel; mais on peut approcher, autant qu'on le veut, de leur rapport en terme rationnels, au moyen de la suite 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ... dont chaque terme est la somme des deux qui le précèdent. En effet, dans cette suite, la différence des carrés de deux termes voisins diffère de leur produit d'une unité seulement, alternativement en plus et en moins.

$$2^2-1=3,\quad 3^2-2^2=5,\quad 5^2-3^2=16.$$
$$2\times1=2,\quad 3\times2=6,\quad 3\times5=15.$$
$$8^2-5^2=39,\quad 13^2-8^2=105,\quad 21^2-13^2=272.$$
$$8\times5=40,\quad 8\times13=104,\quad 21\times13=273.$$

En général, soient a, b, $a+b$, ou c, trois termes successifs; qu'on ait, $bb-aa=ab\pm1$.
On aura .... $cc-bb=bc\mp1$.

En effet, $bb-aa=(b-a)(b+a)=c(b-a)=c(2b-c)=2bc-cc$
et $ab=b(c-b)=bc-bb$.

Donc, $2bc-cc=bc-bb\pm1$;
$bc=cc-bb\pm1$;
ou $cc-bb=bc\mp1$.

§ 93. *Prob.* Trouver deux nombres dont on connoît la somme s des produits par deux nombres donnés a et b, et le produit p.

Dén. Nombres cherchés x et y.

Cond. $\begin{cases} ax+by=s \\ xy \quad =p. \end{cases}$

Réd. Soient carrés les membres de la première équation, soient multipliés par $4ab$ les membres de la seconde, et soient retranchés les membres de la seconde équation (ainsi changés) des membres correspondans de la première (ainsi changés). On obtient

$$\begin{array}{ll} (ax+by)^2 & =ss \\ \underline{4abxy} & \underline{=4abp.} \\ (ax-by)^2 & =ss-4abp. \end{array}$$

De là, $\left.\begin{array}{l} ax-by \\ \text{ou} \quad by-ax \end{array}\right\} =\sqrt{(ss-4abp)}$, qu'on indique ainsi, $ax-by=\pm\sqrt{(ss-4abp)}$

mais, $ax+by=s$

Donc, $ax=\dfrac{s\pm\sqrt{(ss-4abp)}}{2}$; $x=\dfrac{s\pm\sqrt{(ss-4abp)}}{2a}$.

Sol. $by=\dfrac{s\mp\sqrt{(ss-4abp)}}{2}$; $y=\dfrac{s\mp\sqrt{(ss-4abp)}}{2b}$

$$xy=\frac{ss-(ss-4abp)}{4ab}=\frac{4abp}{4ab}=p.$$

Rem. 1^{re}. Quoique les deux valeurs de ax et de by alternent, et que l'une d'elles ne diffère de l'autre que par le signe du radical $\sqrt{(ss-4abp)}$, les deux valeurs de x et de y sont différentes, si a n'est pas égal à b.

Ex. Soit $a=2$, $b=3$, $s=39$, $p=63$. $ss=1521$; $4abp=1512$; $ss-4abp=9$;

$$\sqrt{(ss-4abp)}=3 \; ; \quad . \quad . \quad x=\frac{39\pm3}{4}=\begin{matrix}10\frac{1}{2}\\9\end{matrix} \qquad y=\frac{39\mp3}{6}=\begin{matrix}6\\7.\end{matrix}$$

Savoir, lorsque x vaut $10\frac{1}{2}$, y vaut 6
et lorsque x vaut 9, y vaut 7. Le problème a donc deux solutions différentes, relatives à x et à y; et pour les obtenir il faut avoir égard aux deux signes dont peut être précédé le radical $\sqrt{(ss-4abp)}$.

Rem. 2^{de}. Pour que le problème soit possible, on doit avoir $ss \overline{>} 4abp$; ce qui s'accorde avec le § 87, puisque $abp=ax\times by$.

Aut. exerc. Trouver deux nombres dont on connoît le produit et la différence des produits par des nombres donnés.

§ 94. *Prob.* Trouver deux rectangles égaux dont la somme des bases est donnée s, et

qui soient tels, que, si le premier avoit la hauteur du second, sa surface seroit d'une grandeur donnée p; et si le second avoit la hauteur du premier, sa surface seroit d'une grandeur donnée p'.

Que la hauteur et la base du premier rectangle soient h et b; que la hauteur et la base du second rectangle soient h' et b'.

Les deux rectangles étant égaux, on a la proportion: $h : h' = b' : b$;

ou $h : b' = h' : b$.

Mais, $h : b' = hb' : b'b' = p' : b'b'$

et $h' : b = h'b : bb = p : bb$.

Donc, $p' : b'b' = p : bb$; ou $p' : p = b'b' : bb$;

donc, $\sqrt{p'} : \sqrt{p} = b' : b$.

Partant, $\sqrt{p'} + \sqrt{p} : \begin{matrix}\sqrt{p'} \\ \sqrt{p}\end{matrix} = b' + b : \begin{matrix} b' \\ b \end{matrix} = s : \begin{matrix} b' \\ b \end{matrix} = \begin{matrix} sh : b'h \\ sh' : bh' \end{matrix} = \begin{matrix} sh : p' \\ sh' : p \end{matrix}$.

De là, $b = s \times \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p'} + \sqrt{p}}$; $h = \frac{\sqrt{p'}(\sqrt{p'} + \sqrt{p})}{s} = \frac{p' + \sqrt{pp'}}{s}$.

$b' = s \times \frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{p'} + \sqrt{p}}$; $h' = \frac{\sqrt{p}(\sqrt{p'} + \sqrt{p})}{s} = \frac{p + \sqrt{pp'}}{s}$.

Aut. Base du 1er. rectangle x; Base du 2d. rect. $s - x$.

Hauteur du 1er. $\frac{p'}{s - x}$; Hauteur du 2d. $\frac{p}{x}$.

Surface du 1er. rect. $\frac{p'x}{s - x}$; Surface du 2d. $\frac{p(s - x)}{x}$.

Cond. $\frac{p'x}{s-x} = \frac{p(s-x)}{x}$.

Réd. $p'xx = p(s-x)^2$; $xx:(s-x)^2 = p:p'$.

Du rapport connu entre les deux carrés
et $(s-x)^2$, on peut tirer également l'un
l'autre des deux rapports entre les racines

$$x:s-x=\sqrt{p}:\sqrt{p'}$$
$$x:x-s=\sqrt{p}:\sqrt{p'}.$$

Item : dans cette dernière proportion, en
ıngeant le signe de x, on a

$$-x:-x-s=\sqrt{p}:\sqrt{p'}$$
$$\text{ou}\quad x:\ x+s=\sqrt{p}:\sqrt{p'}.$$

Partant, outre la proportion $x:s-x=\sqrt{p}:\sqrt{p'}$,
ı résout la question dans le sens propre de
ıoncé, suivant lequel s est la somme des
ıx bases, on a aussi l'une des deux pro-
rtions $\begin{matrix} x:x-s=\sqrt{p}:\sqrt{p'} \\ x:x+s=\sqrt{p}:\sqrt{p'} \end{matrix}$, suivant lesquel-
s est la différence des deux bases. La pre-
ıre de ces proportions répond au cas où
$>p'$, et la seconde répond au cas où $p'>p$.
Exemp. Deux paysannes ont porté au mar-
100 œufs entr'elles d'eux ; elles en re-
ment avec des sommes égales. Si chacune
les avoit vendu ses œufs sur le même pied

que l'autre a vendu les siens, la première auroit retiré 180 sols, la seconde en auroit retiré 80.

Un négociant a un certain nombre d'aunes de drap, et 90 aunes de plus d'un drap moins fin ; de manière que les valeurs totales des aunes de chaque espèce sont égales : s'il vendoit chaque espèce au prix de l'autre, il retireroit pour les premières 900 fr., et pour les secondes 2500 fr.

Une personne possède 13000 fr. qu'elle partage en deux portions placées en intérêt de manière qu'elle en retire des revenus égaux. Si elle faisoit valoir la première portion sur le même pied que la seconde, elle retireroit pour cette partie 360 fr. d'intérêt; et si elle faisoit valoir la seconde portion sur le même pied que la première, elle en retireroit 490 fr. d'intérêt.

§ 93. *Prob.* Trouver deux nombres dont on connoît la somme $2s$, ou la différence $2d$; et dont on connoît la somme ou la différence $\frac{p}{q}$ des quotiens qu'on obtient quand on les divise mutuellement l'un par l'autre.

Dén. Nombres cherchés : $s+d$, $s-d$;

quotiens $\frac{s+d}{s-d}$, $\frac{s-d}{s+d}$.

I°. Soit donnée la somme des quotiens.

Cond. $\frac{s+d}{s-d}+\frac{s-d}{s+d}=\frac{p}{q}$.

Réd. $\frac{(s+d)^2+(s-d)^2}{ss-dd}=\frac{p}{q}$; $\frac{2(ss+dd)}{ss-dd}=\frac{p}{q}$;

$ss+dd : ss-dd = p : 2q$; $ss : dd = p+2q : p-2q$.

1°. Soit donnée s; $d=s\sqrt{\frac{p-2q}{p+2q}}$;

$$s+d=s\times\frac{\sqrt{(p+2q)}+\sqrt{(p-2q)}}{\sqrt{(p+2q)}}.$$

$$s-d=s\times\frac{\sqrt{(p+2q)}-\sqrt{(p-2q)}}{\sqrt{(p+2q)}}.$$

$$\frac{s+d}{s-d}=\frac{\sqrt{(p+2q)}+\sqrt{(p-2q)}}{\sqrt{(p+2q)}-\sqrt{(p-2q)}}=\frac{p+\sqrt{(pp-4qq)}}{2q}.$$

$$\frac{s-d}{s+d}=\frac{\sqrt{(p+2q)}-\sqrt{(p-2q)}}{\sqrt{(p+2q)}+\sqrt{(p-2q)}}=\frac{p-\sqrt{(pp-4qq)}}{2q}.$$

2°. Soit donnée d. $s=d\sqrt{\frac{p+2q}{p-2q}}$;

$$s+d=d\times\frac{\sqrt{(p+2q)}+\sqrt{(p-2q)}}{\sqrt{(p-2q)}};$$

$$s-d=d\times\frac{\sqrt{(p+2q)}-\sqrt{(p-2q)}}{\sqrt{(p-2q}}.$$

$\frac{s+d}{s-d}=\frac{p+\sqrt{(pp-4qq}}{2q}$; $\frac{s-d}{s+d}=\frac{p-\sqrt{(pp-4qq)}}{2q}$.

Soit

Soit $2s = 10, \quad 12, \quad 16,$

$2d = 2, \quad 4, \quad 4.$

$\frac{p}{q} = 2\frac{1}{6}, \quad 2\frac{1}{2}, \quad 2\frac{4}{15}.$

Rem. 1^re^. Pour que le problème soit possible, on doit donner $p \overline{>} 2q$; et partant, $\frac{p}{q} \overline{>} 2$:

Soient x et y deux nombres ; j'affirme que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \overline{>} 2$.

En effet, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{xx+yy}{xy}$; mais, $xx+yy \overline{>} 2xy$; donc, $\frac{xx+yy}{xy} \overline{>} 2$.

Ex. Soit $\frac{p}{q} = 2\frac{1}{6}, \ 2\frac{1}{2}, \ 2\frac{4}{15}$.

Rem. 2^de^. La connoissance de la somme des deux quotiens $\frac{x}{y}, \frac{y}{x}$, revient à trouver le rapport de deux nombres en connoissant le rapport de la somme de leurs carrés à leur produit. Le rapport de ces deux nombres étant donné, ils sont l'un et l'autre donnés, si on connoît leur somme ou leur différence.

II°. Soit donnée la différence des quotiens.

Cond. $\frac{s+d}{s-d}-\frac{s-d}{s+d}=\frac{p}{q}$.

Réd. $\frac{(s+d)^2-(s-d)^2}{ss-dd}=\frac{p}{q}$; $\frac{4sd}{ss-dd}=\frac{p}{q}$;

$2sd:ss-dd=p:2q$;
$4ssdd:(ss-dd)^2=pp:4qq$;
$(ss+dd)^2:(ss-dd)^2=pp+4qq:4qq$.
$ss+dd:ss-dd=\sqrt{(pp+4qq)}:2q$;
$ss:dd=\sqrt{(pp+4qq)}+2q:\sqrt{(pp+4qq)}-2q$.
$=\sqrt{((pp+4qq)+2q)^2}:pp$.
$=pp:\sqrt{((pp+4qq)-2q)^2}$.
$s:d=\sqrt{(pp+4qq)}+2q:p=p:\sqrt{(pp+4qq)}-2q$.

1°. Soit donnée s; $d=s\times\frac{\sqrt{(pp+4qq)}-2q}{p}$.

$s+d=s\times\frac{\sqrt{(pp+4qq)}-(2q-p)}{p}$.

$s-d=s\times\frac{2q+p-\sqrt{(pp+4qq)}}{p}$.

$\frac{s+d}{s-d}=\frac{\sqrt{(pp+4qq)}-(2q-p)}{2q+p-\sqrt{(pp+4qq)}}=\frac{\sqrt{(pp+4qq)}+p}{2q}$;

$\frac{s-d}{s+d}=\frac{2q+p-\sqrt{(pp+4qq)}}{\sqrt{(pp+4qq)}-(2q-p)}=\frac{\sqrt{(pp+4qq)}-p}{2q}$.

2°. Soit donnée d; $s=d\times\frac{\sqrt{(pp+4qq)}+2q}{p}$.

$$\frac{s+d}{s-d}=\frac{\sqrt{(pp+4qq)}+(2q+p)}{\sqrt{(pp+4qq)}+(2q-p)}=\frac{\sqrt{(pp+4qq)}+p}{2q}.$$

$$\frac{s-d}{s+d}=\frac{\sqrt{(pp+4qq)}+(2q-p)}{\sqrt{(pp+4qq)}+(2q+p)}=\frac{\sqrt{(pp+4qq)}-p}{2q}.$$

Ex. Soit $2s=10,\quad 12,\quad 16.$

$2d=\ 2,\quad 4,\quad 4.$

$\frac{p}{q}=\frac{5}{6},\quad 1\frac{1}{2},\quad 1\frac{1}{15}.$

Rem. La connoissance de la différence des deux quotiens revient à trouver le rapport de deux nombres, en connoissant le rapport de la différence de leurs carrés à leur produit. Le rapport de ces nombres étant déterminé, on détermine l'un et l'autre, si on connoît leur somme ou leur différence.

Les exemples précédens montrent suffisamment comment on peut ramener à des équations pures du second degré des questions qui, au premier coup-d'œil, ne paroissent pas susceptibles de ce degré de simplicité. Et en particulier, les questions développées dans les §§ 86–88, montrent comment, en exprimant d'une manière symétrique les quantités inconnues, et en les cherchant, non pas immédiatement, mais par le moyen de leur somme et de leur différence, on peut

rendre le procédé plus simple que si on les avoit recherchées immédiatement. Je passe à la solution des équations complètes du second degré; et je crois devoir introduire à cette solution, par celle de quelques questions que nous avons ramenées à des équations simples, en employant dans les dénominations des moyens propres à produire cette simplification.

SECONDE SECTION.

Des Equations complètes du second degré.

---

§ 96. *Prob.* TROUVER deux nombres dont la différence est donnée $2d$, et dont le produit est p.

Dén. Que le petit nombre soit x, l'autre sera $x+2d$; produit $xx+2dx$.

Cond. $xx+2dx=p$.

Le premier membre de cette équation renferme le carré xx de l'inconnue, et le produit de la quantité inconnue x par la quantité connue $2d$; ce premier membre n'est pas un carré; mais il peut le devenir, en ajoutant à ce premier membre (et partant au second) une certaine quantité, de ma-

nière que ce premier membre devienne le carré d'un binome tel, que x soit un de ses termes, et que $2dx$ soit le double produit de ses termes; par conséquent, $2d$ sera le double de l'autre terme, et d le second terme simple. Partant, le premier membre deviendra un carré en lui ajoutant dd; on obtient:

$$xx+2dx+dd=p+dd.$$

$$x+d \qquad =\sqrt{(p+dd)},\ x=\sqrt{(p+dd)}-d$$

$$x+2d=\sqrt{(p+dd)}+d,$$

conformément aux formules du § 86.

Rem. 1^re^. Le procédé qu'on vient de suivre, tend à ramener une équation composée ou complète à une équation pure ou simple, en ajoutant au membre qui contient le carré de l'inconnue et le produit de l'inconnue par une quantité connue, le carré de la moitié de cette quantité connue, ou le carré de la moitié du coefficient du second terme; par cette opération on *complète* le carré, et l'équation complète est ramenée à une équation pure.

Rem. 2^de^. La quantité $x+d$, qu'on obtient par la solution de l'équation pure $(x+d)^2=p+dd$, est la demi-somme des deux quantités cherchées x et $x+2d$; dans le § 86, la recherche de cette demi-somme a conduit aussi immédiatement à une équation pure.

§ 97. *Prob.* Trouver deux nombres dont la somme est $2s$, et dont le produit est p.

Dén. Nombres cherchés, x, et $2s—x$; produit, $2sx—xx$.

Cond. $2sx—xx=p$.

Dans cette équation, le carré de l'inconnue est précédé du signe de la soustraction; on l'ajoute à chaque membre, afin qu'il paroisse dans le second, précédé du signe de l'addition; et pour que les termes qui renferment l'inconnue, soient d'un même côté du signe de l'égalité, on ôte à chaque membre le terme $2sx$ qui est le produit de l'inconnue par la quantité connue $2s$; on obtient :

$xx—2sx+p=o$. Soit complété le carré, en ajoutant ss, et en ôtant p à chaque membre, on obtient $xx—2sx+ss=ss—p$.

$$(x—s)^2=ss—p\,;\quad x—s=\sqrt{(ss—p)}\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} x=s+\sqrt{(ss—p)} \\ 2s—x=s—\sqrt{(ss—p)} \end{array}\right\}, \text{ conformément au § 87.}$$

Rem. Le carré $xx—2sx+ss$ est indifféremment ou celui de $x—s$, ou celui de $s—x$; on a donc l'une ou l'autre des équations

$$\left.\begin{array}{l} x—s \\ s—x \end{array}\right\}=\sqrt{(ss—p)}\,,$$ d'où l'on obtient :

$x = \begin{matrix} s+\sqrt{(ss-p)} \\ s-\sqrt{(ss-p)} \end{matrix}$ que l'on exprime ainsi:

$$x = s \pm \sqrt{(ss-p)}$$

et $2s - x = s \mp \sqrt{(ss-p)}$.

Ce signe ambigu montre qu'on trouve en même tems les deux quantités cherchées; que si l'une d'elles est $s+\sqrt{(ss-p)}$, l'autre est $s-\sqrt{(ss-p)}$, et qu'il n'y a aucune raison pour appeler l'une de ces quantités la plus grande ou la plus petite des deux. La quantité $\begin{matrix} x-s \\ \text{ou } s-x \end{matrix} = \sqrt{(ss-p)}$, provenue de l'équation pure $\begin{matrix} (x-s)^2 \\ (s-x)^2 \end{matrix} = ss-p$, est la demi-différence des deux quantités cherchées.

§ 98. *Prob.* Trouver deux nombres dont on connoît la différence $2d$, et la somme des carrés $2q$.

Dén. Nombres cherchés x, $x+2d$.

Carrés, . . . xx, $xx+4dx+4dd$.

Somme des carrés . $2xx+4dx+4dd$.

Cond. $2xx+4dx+4dd=2q$.

Dans cette équation le carré xx de l'inconnue a un coefficient 2 qui n'est pas un carré; on chasse ce coefficient en divisant par 2 les deux membres de l'équation; on obtient

$xx+2dx+2dd=q$. Le coefficient du second terme est $2d$; la moitié de ce coefficient est d, dont le carré est dd; partant, le premier membre devient un carré, en mettant au 3^me^. terme dd au lieu de $2dd$; et partant, en ôtant à chaque membre dd, on obtient $xx+2dx+dd=q-dd$; ou $(x+d)^2=q-dd$; $x+d=\sqrt{(q-dd)}$;

$$\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{(q-dd)}-d \\ x+2d=\sqrt{(q-dd)}+d \end{array}\right\}$$ conformément au § 88.

Rem. Dans l'équation $x+d=\sqrt{(q-dd)}$, $x+d$ est la demi-somme des deux quantités cherchées x et $x+2d$.

Aut. exerc. Trouver deux nombres dont on connoît la somme $2s$, et la somme des carrés $2q$.

§ 99. *Prob.* Trouver deux nombres tels, que la somme de leurs produits par des nombres donnés a et b, soit une quantité donnée s; et que la somme de leurs carrés soit aussi une quantité donnée q.

Dén. Nombres cherchés . . . . x et y.

Cond. $\left\{\begin{array}{l} ax+by=s \\ xx+yy=q. \end{array}\right.$

Réd. De la première équation, on tire

$$ax=s-by;$$

et de là, $aaxx=ss-2bsy+bbyy$.

Soient multipliés les membres de la seconde équation par aa, $aaxx+aayy=aaq$.

De là, $aayy=aaq-(ss-2bsy+bbyy)$.

$yy(aa+bb)-2bsy=aaq-ss$.

$$yy-\frac{2bs}{aa+bb}y=\frac{aaq-ss}{aa+bb}.$$

$$yy-\frac{2bs}{aa+bb}y+\frac{bbss}{(aa+bb)^2}=\frac{bbss}{(aa+bb)^2}+\frac{aaq-ss}{aa+bb}$$

$$=\frac{aa(aa+bb)q-aass}{(aa+bb)^2}=\frac{aa}{(aa+bb)^2}((aa+bb)q-ss).$$

$$y-\frac{bs}{aa+bb}=\pm\frac{a}{aa+bb}\sqrt{((aa+bb)q-ss)}.$$

$$y=\frac{bs\pm a\sqrt{((aa+bb)q-ss)}}{aa+bb}$$

$$ax=s-by=s-\frac{bbs\pm ab\sqrt{((aa+bb)q-ss)}}{aa+bb}$$

$$=\frac{aas\mp ab\sqrt{((aa+bb)q-ss)}}{aa+bb}.$$

Sol. $$x=\frac{as\mp b\sqrt{((aa+bb)q-ss)}}{aa+bb}$$

$$y=\frac{bs\pm a\sqrt{((aa+bb)q-ss)}}{aa+bb}.$$

$$xx=\frac{bb(aa+bb)q+ss(aa-bb)\mp 2abs\sqrt{((aa+bb)q-ss)}}{(aa+bb)^2}$$

$$yy = \frac{aa(aa+bb)q - ss(aa-bb) \pm 2abs\sqrt{((aa+bb)q-ss)}}{(aa+bb)^2}.$$

$$xx+yy = \frac{(aa+bb)^2 q}{(aa+bb)^2} = q.$$

Ex. Soit $a=1$, $b=1$; on aura les formules du §88.

Soit $a=1$, $b=2$, $s=23$, $q=130$.

Rem. 1re. Pour que le problème soit possible, on doit avoir $(aa+bb)q \overline{>} ss$; et partant, la plus petite valeur de q est $\frac{ss}{aa+bb}$.

Rem. 2de. Pour que les deux valeurs de x soient positives, on doit avoir $as \overline{>} b\sqrt{((aa+bb)q-ss)}$; et partant, $ss \overline{>} bbq$; ou $q \overline{<} \frac{ss}{bb}$; de même, pour que les deux valeurs de y soient positives, on doit avoir $bs \overline{>} a\sqrt{((aa+bb)q-ss)}$, ou $q \overline{<} \frac{ss}{aa}$.

Lorsqu'on a en même tems $q < \frac{ss}{bb}$, $q < \frac{ss}{aa}$, les deux valeurs correspondantes de x et de y répondent à la question dans le sens propre de l'énoncé; lorsque $q < \frac{ss}{bb}$, $q > \frac{ss}{aa}$, la seconde valeur de y est négative, et on résout

les équations $\begin{matrix} ax - by = s \\ xx + yy = q \end{matrix}$; de même, si $q < \frac{ss}{aa}$, $q > \frac{ss}{bb}$, on résout les deux équations,

$by - ax = s$
$xx + yy = q$.

En effet, soient proposées les deux équations $ax - by = s$
$xx + yy = q$.

On trouve $x = \frac{as \pm b\sqrt{((aa+bb)q - ss)}}{aa+bb}$

$y = \frac{-bs \pm a\sqrt{((aa+bb)q - ss)}}{aa+bb}$.

Si $q < \frac{ss}{bb}$, la 2de. solution répond à la première équation $+ax - by = s$; et si $q > \frac{ss}{bb}$, cette solution répond à l'équation $-ax + by = s$; si $q > \frac{aa}{ss}$, la première solution répond à la question dans le sens propre $ax - by = s$; et si $q < \frac{ss}{aa}$, on résout de nouveau l'équation $ax + by = s$.

Application. Partager les nombres donnés a et b, l'un et l'autre en deux parties, de manière que la somme des carrés d'une partie de a et d'une partie de b soit donnée, et que

la somme des carrés des deux autres parties de a et de b soit aussi donnée.

§ 100. Trouver deux nombres dont on connoît la somme s des produits par les nombres donnés a et b, et la différence q de leurs carrés.

Dén. Nombres cherchés, x et y.

Cond. $\begin{cases} ax+by=s \\ xx-yy=q. \end{cases}$

Réd. $ax=s-by$; $aaxx=ss-2bsy+bbyy$.
Mais, $aaxx=aaq+aayy$.
Donc, $ss-2bsy+bbyy=aaq+aayy$.

1er. *Cas.* Soit $aa=bb$, ou $a=b$; le problème devient du premier degré, et on a,

$$y=\frac{ss-aaq}{2bs}=\frac{ss-aaq}{2as}.$$

$$ax=s-by=s-\frac{ss-aaq}{2s}=\frac{ss+aaq}{2s};$$

$$x=\frac{ss+aaq}{2as}.$$ (Voy. § 88. *Rem.* 5me).

2d. *Cas.* Soit $aa>bb$, ou $a>b$;
$yy(aa-bb)+2bsy+aaq=ss.$

$$yy+\frac{2bs}{aa-bb}y+\frac{aa}{aa-bb}q=\frac{ss}{aa-bb}.$$

$$yy+\frac{2bs}{aa-bb}y+\frac{bbss}{(aa-bb)^2}=\frac{aass-aa(aa-bb)q}{(aa-bb)^2}.$$

$$y+\frac{bs}{aa-bb}=\frac{\pm a\sqrt{(ss-(aa-bb)q)}}{aa-bb};$$

$$y=\frac{-bs\pm a\sqrt{(ss-(aa-bb)q)}}{aa-bb}.$$

Mais, $ax=s-by$; donc, $x=\frac{as\mp b\sqrt{(ss-(aa-bb)q)}}{aa-bb}$.

3^{me}. *Cas.* Soit $aa<bb$, ou $a<b$; on a de même, $x=\frac{-as\pm b\sqrt{(ss+(bb-aa)q)}}{bb-aa}$

$$y=\frac{bs\mp a\sqrt{(ss+(bb-aa)q)}}{bb-aa}.$$

Ex. Soit $a=3$, $b=2$, $s=37$, $q=56$.
$a=2$, $b=3$, $s=33$, $q=56$.

Rem. 1re. Les trois cas que nous avons distingués donnent des résultats très différens. Dans le premier cas, il y a une seule valeur des quantités inconnues.

Dans le second cas, pour que le problème soit possible, on doit avoir $q\overline{\overline{<}}\frac{ss}{aa-bb}$; de manière que la plus grande valeur de q est

$\frac{ss}{aa-bb}$; alors, $y=-\frac{bs}{aa-bb}$, et on résout $x=+\frac{as}{aa-bb}$.

les équations $\begin{matrix} ax-by=s \\ xx-yy=q \end{matrix}$.

La 2de. valeur de x, $\frac{as+b\sqrt{(ss-(aa-bb)q)}}{aa-bb}$ est positive, et la valeur correspondante de y, $\frac{-bs-a\sqrt{(ss-(aa-bb)q)}}{aa-bb}$ étant négative, ces valeurs répondent toujours à l'équation $ax-by=s$.

La 1re. valeur de x, $\frac{as-b\sqrt{(ss-(aa-bb)q)}}{aa-bb}$, est aussi toujours positive; en effet, par supposition $a>b$; donc, $aass>bbss$; et, à plus forte raison, $aass>bb(ss-(aa-bb)q)$, ou $as>b\sqrt{(ss-(aa-bb)q)}$; la première valeur de y est positive, si $q<\frac{ss}{aa}$; et elle est négative si $q>\frac{ss}{aa}$; et partant, on répond à l'une ou à l'autre des deux équations $ax\pm by=s$, suivant qu'on a $q\lessgtr\frac{ss}{aa}$.

Le troisième cas donne toujours des valeurs réelles aux quantités cherchées, puisque la quantité qui est sous le signe radical est la somme de deux quantités supposées l'une et l'autre positives. Les deux valeurs de y sont l'une et l'autre positives; la première valeur de x est aussi positive; mais sa seconde valeur est négative: on répond, donc par l'une et par l'autre de ces deux valeurs, aux deux premières équations $\begin{matrix} ax+by=s. \\ -ax+by=s. \end{matrix}$

Rem. 2[de]. Les formules du troisième cas peuvent s'obtenir de celles du second, en changeant les signes des deux termes des expressions fractionnaires de ces dernières.

Rem. 3[me]. Dans la valeur de x relative au second cas, par ex., $\frac{as\mp b\sqrt{(ss-(aa-bb)q)}}{aa-bb}$; soit fait, $a=b$; on doit obtenir la valeur de x relative au premier cas. Dans la première formule $\frac{as-b\sqrt{(ss-(aa-bb)q)}}{aa-bb}$; le numérateur et le dénominateur évanouissent en même tems; et pour la seconde valeur $\frac{as+b\sqrt{(ss-(aa-bb)q)}}{aa-bb}$, le dénominateur

seul évanouit, de manière que cette expression devient $\frac{s}{a-b}=\frac{s}{o}$. Ce dernier cas montre bien l'impossibilité d'une des valeurs de x; mais, le premier cas feroit croire que le problème est indéterminé, tandis qu'il est susceptible d'une seule réponse déterminée.

Pour obtenir cette solution, soit introduite la somme au lieu de la différence de la quantité rationnelle as, et de la quantité irrationnelle $b\sqrt{(ss-(aa-bb)q)}$, dans la fraction qui exprime la valeur de x; en multipliant les deux termes de cette fraction par $as+b\sqrt{(ss-(aa-bb)q)}$, on obtient :

$$\frac{as-b\sqrt{(ss-(aa-bb)q)}}{aa-bb}=\frac{ss(aa-bb)+bb(aa-bb)q}{(aa-bb)(as+b\sqrt{(ss-(aa-bb)q)})}$$

$$=\frac{(aa-bb)(ss+bbq)}{(aa-bb)(as+b\sqrt{(ss-(aa-bb)q)})}=\frac{ss+bbq}{as+b\sqrt{(ss-(aa-bb)q)}}.$$

Dans cette nouvelle manière de présenter la valeur de x, aucun des termes n'évanouit par la supposition $a=b$; mais dans cette supposition, cette fraction devient $\frac{ss+aaq}{2as}$, conformément au premier cas. On trouve de même, pour ce cas, $y=\frac{ss-aaq}{2as}$; et on tireroit les

mêmes

mêmes valeurs des formules, du troisième cas.

Après avoir traité l'équation $ss-2bsy+bbyy=aaq+aayy$, sans avoir égard aux valeurs respectives de a et de b; mais, comme ayant l'une des deux formes, $yy(aa-bb)+2bsy+aaq=ss$, $yy(bb-aa)-2bsy+ss=aaq$, s'il arrive que $a=b$, on laisse dans cette équation un facteur évanouissant $aa-bb$, qui doit affecter les résultats obtenus sans avoir égard à cette évanouissance. Aussi, le procédé par lequel on cherche la valeur de la fraction $\frac{as-b\sqrt{(ss-(aa-bb)q)}}{aa-bb}$, dont les termes évanouissent en même tems, revient-il à chasser le diviseur commun qui affecte ces deux termes, lequel, dans le cas particulier $a=b$, évanouit, et fait évanouir les deux termes de la fraction dont il est un diviseur commun.

Application. Partager les nombres donnés a et b l'un et l'autre en deux parties, de manière que la différence des carrés d'une partie de a et d'une partie de b soit donnée, et que la différence des carrés des deux autres parties de a et de b soit aussi donnée.

§ 101. Il suit de l'exemple précédent que

le signe $\frac{o}{o}$ n'est pas toujours celui de l'indétermination; mais qu'avant de prononcer sur la valeur de ce signe, il faut rechercher si l'évanouissance simultanée des deux termes d'une fraction ne provient point de quelque diviseur commun, qui appartient constamment à ces deux termes; lequel, pour une relation particulière des termes qui le composent, est zéro. Ce n'est pas ici le lieu de traiter cette matière sous un point de vue général; je me contenterai de l'éclaircir par un petit nombre d'exemples.

Soit $\frac{aa-bb}{a-b}$; lorsque $a=b$, les deux termes de cette fraction évanouissent en même tems. Mais puisque $aa-bb=(a-b)(a+b)$, $\frac{aa-bb}{a-b}=\frac{a-b}{a-b}(a+b)=a+b$; donc, lorsque $a=b$; $\frac{aa-bb}{a-b}=2a$.

De même $a^3-b^3=(a-b)(aa+ab+bb)$; donc, $\frac{a^3-b^3}{a-b}=\frac{a-b}{a-b}(aa+ab+bb)=aa+ab+bb$.

Soit $a=b$; $\frac{a^3-b^3}{a-b}=3aa$.

De même, $\frac{a^3-b^3}{aa-bb}=\frac{(a-b)(aa+ab+bb)}{(a-b)(a+b)}=\frac{aa+ab+bb}{a+b}$;

soit $a=b$; $\frac{a^3-b^3}{aa-bb}=\frac{3aa}{2a}=\frac{3}{2}a$.

$a^4-b^4=(a-b)(a^3+aab+abb+b^3)$

$\frac{a^4-b^4}{a-b}=a^3+aab+abb+b^3=4a^3$ lorsque $a=b$.

$\frac{a^4-b^4}{aa-bb}=\frac{a^3+aab+abb+b^3}{a+b}=2aa$ lorque $a=b$.

$\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}=\frac{a^3+aab+abb+b^3}{aa+ab+bb}=\frac{4}{3}a$ lorsque $a=b$.

Nous reviendrons dans la suite sur ce sujet.

§ 102. *Prob.* Partager un nombre donné a en deux parties, telles, que le rapport des carrés de ces deux parties soit égal au rapport donné de m à n.

En prenant l'expression *partager* dans son sens propre, qui comporte que a est la somme des deux parties cherchées, ce problème est susceptible d'une seule solution très facile à trouver.

En effet, puisque les carrés des deux parties cherchées sont entr'eux dans le rapport donné de m à n, les deux parties sont entre elles dans le rapport de $\sqrt{m}$ à $\sqrt{n}$; et par-

tant, ces deux parties sont $a.\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$ et $a.\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$.

Mais si on étend la signification du mot *partager* au delà de sa signification propre, de manière qu'on puisse regarder a comme étant la différence des deux quantités cherchées, ce problème a une seconde solution. Et comme la supposition que les deux quantités cherchées diffèrent l'une de l'autre de la quantité a, exclut l'égalité de m à n, supposons, par exemple, $m>n$.

Soient donc x et $a-x$ les deux parties cherchées. On doit avoir la proportion $xx:(a-x)^2=m:n$. Or, les carrés de $a-x$ et de $x-a$ sont les mêmes; partant, si on descend des carrés aux racines, on doit avoir l'une ou l'autre des deux proportions, $x:\begin{matrix}a-x\\x-a\end{matrix}=\sqrt{m}:\sqrt{n}$. A la première de ces proportions $x:a-x=\sqrt{m}:\sqrt{n}$, répond la solution conforme à l'énoncé dans le sens propre, $x=a\times\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$; $a-x=a\times\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$. A la seconde de ces proportions $x:x-a=\sqrt{m}:\sqrt{n}$, répond la so

lution $x=a\times\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$; et $x-a=a\times\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$.

Si on applique ces formules correspondantes à la supposition $m>n$, à la supposition $m=n$, on a $x=a\times\frac{\sqrt{m}}{o}$, $x-a=a\times\frac{\sqrt{n}}{o}$; et partant, on obtient le signe de l'impossible, à moins qu'on n'ait en même tems $a=o$; dans lequel cas $x=\frac{o}{o}$, ou la question est indéterminée: en effet, la proportion $x:x=1:1$ a lieu quelle que soit la valeur de x.

Dans la supposition $n>m$, et $\sqrt{n}>\sqrt{m}$, de la proportion $x:x-a=\sqrt{m}:\sqrt{n}$, on tire $x:-a=\sqrt{m}:\sqrt{n}-\sqrt{m}$; $x-a:-a=\sqrt{n}:\sqrt{n}-\sqrt{m}$; et partant, $x=-a\times\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}$; $x-a=-a\times\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}$; et on résout la proportion $x:a+x=\sqrt{m}:\sqrt{n}$, en changeant le signe de x.

Soit la proportion $xx:(a-x)^2=m:n$, réduite en équation, on obtient $nxx=maa-2max+mxx$.

1^er^. *Cas.* Soit $m=n$; $2ax=aa$; $x=\frac{1}{2}a$.

2^d^. *Cas.* Soit $m>n$; $xx(m-n)-2max+maa=o$

$$xx(m-n)^2-2m(m-n)ax+m(m-n)aa=o$$

$$xx(m-n)^2-2m(m-n)ax+mmaa=mnaa$$

$$x(m-n)-ma=\pm a\sqrt{mn}.$$

$$x=a\times\frac{m\pm\sqrt{mn}}{m-n}=a\times\frac{\sqrt{m}(\sqrt{m}\pm\sqrt{n})}{(\sqrt{m}-\sqrt{n})(\sqrt{m}+\sqrt{n})}.$$

On a donc les deux solutions,

$$x=a\times\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}};\quad x=a\times\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}.$$

La solution $x=a\times\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$, répond à la proportion $x:a-x=\sqrt{m}:\sqrt{n}$.

La solution $x=a\times\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$, répond à la proportion $x:x-a=\sqrt{m}:\sqrt{n}$.

La première solution est toujours possible. La seconde est impossible si $m=n$, en supposant que a n'évanouit pas.

3^{me}. *Cas*. Soit $m<n$; on doit traiter l'équation, $x(n-m)+2max=maa$;

$$x=a\times\frac{-m\pm\sqrt{mn}}{n-m}=\begin{cases}a\times\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\\ -a\times\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}.\end{cases}$$

Rem. 1re. Si on tire les formules relatives au troisième cas $m<n$, des formules relatives au second cas $m>n$, on obtient le dénominateur ou diviseur négatif $\sqrt{m}-\sqrt{n}$; mais si on traite ce troisième cas conformément

à la supposition, on obtient $x=-a\times\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}$; $a-x=+a\times\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{m}}$; expressions dans lesquelles le dénominateur est positif, et qui résolvent la proportion $x:a+x=\sqrt{m}:\sqrt{n}$.

Ex. Un voyageur part du lieu B pour aller au lieu C, en même tems qu'un autre voyageur part du lieu C pour aller au lieu B. Chacun d'eux marche avec une vîtesse uniforme; ces deux vîtesses ont entr'elles un tel rapport que le premier arrive à C quatre heures après qu'ils se sont rencontrés, et que le second arrive à B neuf heures après cette rencontre. On demande combien chacun d'eux employa d'heures pour faire son voyage.

Item: pour des tems donnés t^2 et T^2, écoulés depuis leur rencontre jusqu'à l'arrivée de chacun d'eux à sa destination.

Application à la physique. Connoissant les intensités de deux flambeaux, et leur distance, trouver sur la droite qui les joint (ou sur son prolongement) le point qui en est également éclairé. De même, pour le point également attiré par deux corps dont les masses sont données.

La réduction de ces applications à la ques-

tion de mathématiques pures, contenue dans ce §, est fondée sur le principe suivant : les qualités qui partent d'un centre, ou qui convergent vers un centre (telles que la lumière, la gravitation, etc.) suivent, dans leur intensité, la raison inverse du carré de la distance à ce centre.

§ 103. *Prob.* Partager les deux nombres donnés a et b l'un et l'autre en deux parties, de manière qu'une des parties de a soit à une des parties de b dans le rapport donné de m à n, et que le produit des deux autres parties soit p.

Dén. Premières parties de a et de b, mx, nx; Secondes parties de a et de b, $a-mx$, $b-nx$. Produit de ces deux dernières parties, $ab-x(na+mb)+mnxx$.

Cond. $mnxx-x(na+mb)+ab=p$.

$$\textit{Réd.}\quad xx-x\times\frac{na+mb}{mn}+\frac{ab}{mn}=\frac{p}{mn}.$$

$$xx-x\times\frac{na+mb}{mn}+\frac{(na+mb)^2}{4mmnn}=\frac{(na-mb)^2+4mnp}{4mmnn},$$

$$x-\frac{na+mb}{2mn}=\frac{\pm\sqrt{((na-mb)^2+4mnp)}}{2mn}.$$

$$x=\frac{na+mb\pm\sqrt{((na-mb)^2+4mnp)}}{2mn}.$$

$$mx = \frac{na + mb \pm \sqrt{((na - mb)^2 + 4mnp)}}{2n}.$$

$$a\text{-}mx = \frac{na - mb \mp \sqrt{((na - mb)^2 + 4mnp)}}{2n}.$$

$$b\text{-}nx = \frac{-na + mb \mp \sqrt{((na - mb)^2 + 4mnp)}}{2m}.$$

$$(a - mx)(b - nx) = \frac{-(na\text{-}mb)^2 + ((na\text{-}mb)^2 + 4mnp)}{4mn} = p.$$

Ex. Soit $m=2$, $n=3$; $a=80$, $b=100$; $p=4200$.
$m=3$, $n=4$; $a=64$, $b=80$; $p=1920$.

R. 1re. Dans l'équat. $mnxx\text{-}x(na+mb)+ab=p$, on peut éviter l'introduction des fractions dans le cours de la réduction, en rendant le coefficient de xx un carré, et partant, en multipliant les deux membres de cette équation par mn, et en regardant mnx comme étant l'inconnue; et comme pour compléter le carré on doit diviser par $2mn$ le coefficient du second terme qui ne se présente pas comme divisible par 2, il convient de multiplier les deux membres de l'équation par $4mn$; on obtient :

$$4m^2n^2x^2 - 4mnx(na + mb) + \begin{matrix} 4mnab \\ -4mnp \end{matrix} = o.$$

de là, $2mnx\text{-}(na+mb) = \pm\sqrt{}(na\text{-}mb)^2 + 4mnp)$.

$x=\frac{na+mb\pm\sqrt{((na-mb)^2+4mnp)}}{2mn}$, ainsi qu'on l'a trouvé.

Ce procédé auroit pu aussi être employé dans les § 97 et 98.

Rem. 2[de]. Soit $na=mb$, ou $a:b=m:n$;

$mx=a\pm\sqrt{\frac{m}{n}p}$; $nx=b\pm\sqrt{\frac{n}{m}p}$.

$a-mx=\mp\sqrt{\frac{m}{n}p}$; $b-nx=\mp\sqrt{\frac{n}{m}p}$.

Rem. 3[me]. Comme le produit $ab-x(na+mb)+mnxx$ ou $mnxx-x(na+mb)+ab$ provient indifféremment ou des deux facteurs $(a-mx)(b-nx)$, ou des deux facteurs $(mx-a)(nx-b)$, lorsqu'on fait ce produit égal à p sans s'occuper de son origine, on doit trouver des valeurs des inconnues qui satisfont à chacune de ces deux origines.

Les premières valeurs

$mx=\frac{na+mb+\sqrt{((na-mb)^2+4mnp)}}{2n}$ sont

$nx=\frac{na+mb+\sqrt{((na-mb)^2+4mnp)}}{2m}$

l'une et l'autre positives, et les valeurs correspondantes

$$a-mx=\frac{na-mb-\sqrt{((na-mb)^2+4mnp)}}{2n}$$

$$b-nx=\frac{na+mb-\sqrt{((na-mb)^2 4mnp)}}{2m},$$

sont l'une et l'autre négatives, et répondent à la condition $(mx-a)(nx-b)=p$.

En effet, les valeurs de mx et de nx sont respectivement plus grandes que a et que b. cela est évident pour la valeur de mx, et il le devient pour la valeur de nx, en remarquant que $(na-mb)^2=(mb-na)^2$.

Les secondes valeurs de $a-mx$ et de $b-nx$ sont l'une et l'autre positives, soit qu'on ait $na \gtrless mb$. En effet, ces secondes valeurs sont

$$\frac{\sqrt{((na-mb)^2+4mnp)}+na-mb}{2n}$$

$$=\frac{\sqrt{((mb-na)^2+4mnp)}-(mb-na)}{2n}$$

et $$\frac{\sqrt{((na-mb)^2+4mnp)}-(na-mb)}{2m}.$$

$$=\frac{\sqrt{((mb-na)^2+4mnp)}+(mb-na)}{2m}.$$

Quant aux secondes valeurs de mx et de nx, j'affirme qu'elles sont positives si $ab>p$, et négatives si $ab<p$. En effet, si $ab>p$,

$4mnab > 4mnp$; mais $4mnab = (na+mb)^2 - (na-mb)^2$; donc, si $ab > p$; $(na+mb)^2 > (na-mb)^2 + 4mnp$; et $na+mb > \sqrt{((na-mb)^2 + 4mnp)}$. Au contraire, si $ab < p$, les secondes valeurs de mx et de nx sont négatives, alors les quantités a et b sont respectivement les excès des secondes parties sur les premières, et on résout l'équation $(mx+a)(nx+b) = p$.

Aut. exerc. Partager deux nombres donnés a et b l'un et l'autre en deux parties, de manière que le rapport d'une partie de a à une partie de b soit donné, et que la somme des carrés des deux autres parties, ou que la différence des carrés de ces parties, soit égale à une quantité donnée q.

Trouver un rectangle dont les côtés sont entr'eux comme m et n, si à ces côtés on ôte les quantités données a et b, sa surface sera de grandeur donnée p.

Trouver un parallélipipède rectangle dont les côtés sont entr'eux comme les nombres donnés l, m, n. Si on prend les sommes ou les différences de ses côtés, et des quantités données a, b, c, la surface du parallélipipède fait avec ces sommes ou ces différences, sera d'une grandeur donnée p.

Tout étant posé comme précédemment, la capacité du second parallélipipède différera de celle du premier d'une quantité donnée p.

§ 104. *Prob.* Partager deux nombres donnés a et b l'un et l'autre en deux parties, de manière que le produit d'une partie de a par une partie de b, soit égal à un nombre donné p, et que le produit des parties restantes de a et de b soit aussi égal à un nombre donné p'.

Dén. 1re. Partie de a, x; 2de. Partie de a, $a-x$,

1re. Partie de b, $\frac{p}{x}$; 2de. Partie de b, $b-\frac{p}{x}$.

Cond. $(a-x)(b-\frac{p}{x})=p'$.

Réd. $ab-bx-\frac{ap}{x}+p=p'$.

$abx-bxx-ap+px=p'x$.

$bxx-x(ab+p-p')+ap=o$;

ou $4bbxx-4bx(ab+p-p')+4abp=o$.

Soit regardé $2bx$ comme étant la première partie du binome dont le premier membre doit devenir le carré,

$4bbxx-4bx(ab+p-p')+(ab+p-p')^2$

$=(ab+p-p')^2-4abp$.

$=(ab-p+p')^2-4abp'=PP$ pour abréger.

$=(ab-p-p')^2-4pp'$.

$2bx-(ab+p-p')=\pm P$.

Sol. $x=\frac{ab+p-p'\pm P}{2b}$; $\frac{p}{x}=\frac{2bp}{ab+p-p'\pm P}$

$\frac{2bp(ab+p-p'\mp P)}{4abp}=\frac{ab+p-p'\mp P}{2a}$.

$a-x=\frac{ab-p+p'\mp P}{2b}$; $b-\frac{p}{x}=\frac{ab-p+p'\pm P}{2a}$.

$(a-x)(b-\frac{p}{x})=\frac{(ab-p+p')^2-PP}{4ab}=\frac{4abp'}{4ab}=p'$.

Ex. Soit $a=100$; $b=120$, $p=1620$, $p'=4620$.
$a=80$, $b=96$, $p=1792$, $p'=1920$.

Rem. 1^re^. Ce problème peut être ramené à celui du § 93, dans lequel on cherche deux nombres dont on connoît le produit et la somme de leurs produits par des nombres donnés.

En effet, soient x et y les deux premières parties de a et de b; et partant, $a-x$, $b-y$, les secondes parties des mêmes nombres; on a les deux équations $\begin{matrix} xy=p \\ (a-x)(b-y)=p' \end{matrix}$

$\begin{matrix} xy=p \\ ab-(bx+ay)+xy=p' \end{matrix}$; de là, $\begin{matrix} xy=p \\ bx+ay=ab+p-p'. \end{matrix}$

Rem. 2^de^. Le produit $ab-(bx+ay)+xy$, peut aussi-bien provenir des deux facteurs $x-a$ et $y-b$, que des deux facteurs $a-x$

et $b-y$. Dans le premier cas, les deux facteurs $x-a$ et $y-b$ sont les excès des facteurs x et y du premier produit p sur les nombres donnés a et b respectivement.

Item: le produit p reste le même, quoique ses facteurs x et y changent l'un et l'autre de signes; alors les facteurs $a-x$, $b-y$, deviennent respectivement $a+x$, $b+y$, et les quantités données a et b sont les excès des facteurs du second produit p' sur les facteurs du premier produit p.

Partant, les formules trouvées peuvent répondre à chacun de ces trois cas.

On doit donc chercher à interpréter ces formules de manière à s'assurer auquel de ces trois cas elles s'appliquent, suivant les grandeurs respectives des quantités données a, b, p, p'. Le théorème suivant est destiné à lever toute incertitude à cet égard.

Théorème. Soit a la somme (dans le sens propre de cette expression) de deux quantités x et x'; et soit b la somme de deux autres quantités y et y'.

J'affirme que $\sqrt{ab}>\sqrt{xy}+\sqrt{x'y'}$.

Dem. Puisque $a=x+x'$
et $b=y+y'$.
$ab=xy+xy'+x'y+x'y'$.

Or, $xy'-2\sqrt{xx'yy'}+x'y=(\sqrt{xy'}-\sqrt{x'y})^2$;
donc, $xy' \qquad +x'y>2\sqrt{xx'yy'}$
$$>2\sqrt{xy}\times\sqrt{x'y'}$$
donc, $ab>xy+2\sqrt{xy}\times\sqrt{x'y'}+x'y'>(\sqrt{xy}+\sqrt{x'y'})^2$.
donc, $\sqrt{ab} \qquad >\sqrt{xy}+\sqrt{x'y'}$.

Scholie. Lorsque $xy'=x'y$, le signe d'inégalité se change en celui d'égalité.

Application. Dans le problème précédent soient conservées les expressions x et y des deux premières parties, et soient les secondes parties, x' et y'.

1°. Si $\begin{matrix} a=x+x' \\ b=y+y' \end{matrix}$, $\sqrt{ab}>\sqrt{p}+\sqrt{p'}$;

alors, $PP=(ab-p-p')^2-4pp'$
$$=(ab-(\sqrt{p}-\sqrt{p'})^2)(ab-(\sqrt{p}+\sqrt{p'})^2).$$

Les deux valeurs de chacune des quantités x, y, x', y', sont positives, et on résout les équations $\begin{matrix} xy \qquad =p \\ (a-x)(b-y)=p' \end{matrix}$ dans le sens propre de l'énoncé.

2°. Si $\begin{matrix} x=a+x' \\ y=b+y' \end{matrix}$; $\sqrt{p}>\sqrt{ab}+\sqrt{p'}$;

alors, $PP=(p-ab-p')^2-4abp'$
$$=(p-(\sqrt{ab}-\sqrt{p'})^2)(p-(\sqrt{ab}+\sqrt{p'})^2).$$

Les deux valeurs de chacune des quantités x et y sont positives, les valeurs de $a-x$ et de $b-y$,

$b-y$, sont négatives, et on résout les équations $\begin{matrix} xy = p \\ (x-a)(y-b)=p' \end{matrix}$.

3°. Si $\begin{matrix} x'=a+x \\ y'=b+y \end{matrix}$; $\sqrt{p'}>\sqrt{ab}+\sqrt{p}$;

alors, $PP=(p'-ab-p)^2-4abp$
$=(p'-(\sqrt{ab}-\sqrt{p})^2)(p'-(\sqrt{ab}+\sqrt{p})^2)$.

Les deux valeurs de chacune des quantités x et y changent de signes; les facteurs $a-x$, $b-y$, deviennent $a+x$, $b+y$, et on résout les équations $\begin{matrix} xy = p \\ (a+x)(b+y)=p' \end{matrix}$.

Partant, les trois cas auxquels donne lieu le problème précédent, sont liés entr'eux d'une manière si intime, qu'on résout l'un d'entr'eux suivant le rapport qu'ont entr'elles les quantités ab, p, p'; et que l'obtention de l'un ou de l'autre de ces trois cas ne dépend pas du choix du calculateur, mais qu'elle est déterminée par l'état de la question, ou par celui qui la propose.

Ex. Une personne qui possède 20000 fr., les fait valoir à deux taux différens d'intérêt, dont la somme est $11\frac{0}{0}$. L'intérêt de la première partie est 540 fr. et l'intérêt de la seconde partie est 550 fr.

Il y a un rectangle dont la surface vaut 391 pieds carrés; si on ajoute un pied à chacun de ses côtés, sa surface vaudra 432 pieds carrés.

Une personne emploie un certain nombre d'ouvriers, auxquels elle paie 320 sous; elle emploie cinq ouvriers de plus, à chacun desquels elle paie deux sous de plus, et elle a payé à ces derniers 450 sous.

Un négociant escompte pour 10800 fr. deux billets, l'un de 6245 fr., payable dans sept mois, et l'autre de 4900 fr. payable dans cinq mois, au même taux d'intérêt. Quel est-il ?

Un négociant escompte deux billets, l'un de 8776 fr. payable dans neuf mois, l'autre de 7488 fr. payable dans huit mois; il a payé pour le premier de plus que le second 1200 fr. On demande le taux de l'intérêt.

Un négociant doit un billet de 6240 fr. payable dans huit mois; et un autre billet de 7632 fr. payable dans neuf mois. Il retire ces deux billets, et remet à leur place un billet de 14256 fr. payable dans un an sans intérêt. On demande le taux de l'intérêt.

Un négociant a acheté un certain nombre d'aunes d'étoffe pour lesquelles il a payé 1728 fr.

Il en prend 24 pour son usage, il vend le reste pour 1800 fr., de manière qu'il gagne 3 fr. par aune.

Quelques amis ont fait une partie dont l'écot total monte à 432 fr. Deux d'entr'eux sont défrayés, et l'écot particulier de chacun des payans est par là augmenté de 3 fr.

NB. Ces derniers exercices peuvent être ramenés à la question : trouver deux nombres dont on connoît le produit, et la différence des produits par des nombres donnés.

Ex. ultérieurs plus compliqués. Soient trois nombres donnés a, b, c; on demande de partager chacun d'eux en deux parties, de manière que le produit d'une partie de a par une partie de b soit égal à un nombre donné p; que le produit de l'autre partie de b par une partie de c soit égal à un nombre donné p'; et que le produit des parties restantes de c et de a soit p''.

Item : pour quatre, cinq, etc., nombres à partager; et pour les cas dans lesquels les nombres donnés, ou quelques-uns d'entr'eux, sont les différences et non les sommes des nombres cherchés.

§ 105. *Prob.* Trouver deux rectangles dont

on connoît la somme ou la différence des surfaces, q, la somme ou la différence des bases, a, et dont on connoît les surfaces p et p' quand à la base de chacun d'eux on donne la hauteur de l'autre, ou quand on alterne leurs hauteurs.

Soient b et h la base et la hauteur du premier rectangle.

Soient b' et h' la base et la hauteur du second rectangle.

On a $bh'=p$; $b'h=p'$.

Or, $bh:bh'=h:h'=b'h:b'h'$;

donc, $bh:p=p':b'h'$. Dans cette proportion on connoît la somme ou la différence des extrêmes, et les deux termes moyens; donc, les deux extrêmes sont l'un et l'autre connus.

Mais, $bh:b'h=b:b'$; donc, le rapport de b à b' est aussi connu; mais la somme ou la différence de b et de b' est supposée connue; donc, b et b' sont l'une et l'autre connues.

Soit, par exemple, q la somme des deux surfaces, et a la somme des deux bases.

De la proportion $bh:p=p':b'h'$; on tire

$$\frac{bh-b'h'}{2}=\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}qq-pp')}.$$

Mais, $\dfrac{bh+b'h'}{2}=\frac{1}{2}q$.

Donc, $bh \quad =\frac{1}{2}q\pm\sqrt{(\frac{1}{4}qq-pp')}$

$b'h'=\frac{1}{2}q\mp\sqrt{(\frac{1}{4}qq-pp')}$.

De la proportion $bh;b'h=b:b'$;

ou $\quad \frac{1}{2}q\pm\sqrt{(\frac{1}{4}qq-pp')}:p'=b:b'$;

ou $p:\frac{1}{2}q\mp\sqrt{(\frac{1}{4}qq-pp')} \quad =b:b'$; on tire

$\frac{1}{2}q+p'\pm\sqrt{(\frac{1}{4}qq-pp')}:p'=b+b':b'$;

$$b'=\frac{ap'}{\frac{1}{2}q+p'\pm\sqrt{(\frac{1}{4}qq-pp')}}$$

$$=\frac{ap'(\frac{1}{2}q+p'\mp\sqrt{(\frac{1}{4}qq-pp')})}{qp'+p'p'+pp'}.$$

$$=\frac{a(\frac{1}{2}q+p'\mp\sqrt{(\frac{1}{4}qq-pp')})}{q+p+p'}.$$

2°. $\frac{1}{2}q+p\mp\sqrt{(\frac{1}{4}qq-pp')}:p=b+b':b$;

$$b=\frac{ap}{\frac{1}{2}q+p\mp\sqrt{(\frac{1}{4}qq-pp')}}$$

$$=\frac{a(\frac{1}{2}q+p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}qq-pp')})}{q+p+p'}.$$

$$h'=\frac{p}{b}=\frac{\frac{1}{2}q+p\mp\sqrt{(\frac{1}{4}qq-pp')}}{a};$$

$$h=\frac{p'}{b'}=\frac{\frac{1}{2}q+p'\pm\sqrt{(\frac{1}{4}qq-pp')}}{a}.$$

	Premier rectangle,	*Second rectangle.*
Aut. Dén. Base . .	x, ...	$a-x$.
Hauteur . .	$\frac{p'}{a-x}$, ...	$\frac{p}{x}$.
Surface . . .	$\frac{p'x}{a-x}$	$\frac{p(a-x)}{x}$.

Cond. $p' \times \frac{x}{a-x} + p \times \frac{a-x}{x} = q$.

Réd. $\frac{p'xx+p(a-x)^2}{x(a-x)} = q$.

$p'xx+p(a-x)^2 = qx(a-x)$.

Ou $xx(p+p'+q)-ax(2p+q)+aap=0$.

Sol. $x = a \times \frac{2p+q \pm \sqrt{(qq-4pp')}}{2(p+p'+q)}$.

$a-x = a \times \frac{2p'+q \mp \sqrt{(qq-4pp')}}{2(p+p'+q)}$.

$\frac{p'}{a-x} = a \times \frac{2p'+q \pm \sqrt{(qq-4pp')}}{2(p+p'+q)}$;

$\frac{p}{x} = a \times \frac{2p+q \mp \sqrt{(qq-4pp')}}{2(p+p'+q)}$.

$p' \cdot \frac{x}{a-x} = p' \cdot \frac{2p+q \pm \sqrt{(qq-4pp')}}{2p'+q \mp \sqrt{(qq-4pp')}}$;

$= \frac{q \pm \sqrt{(qq-4pp')}}{2}$.

$$p.\frac{a-x}{x}=p\,\frac{2p'+q\mp\sqrt{}(qq-4pp')}{2p+q\pm\sqrt{}(qq-4pp')}.$$

$$=\frac{q\mp\sqrt{}(qq-4pp')}{2}.$$

Rem. 1^{re}. Dans l'équation $p'xx+p(a-x)^2=qx(a-x)$; soient regardés $p'xx$ et $p(a-x)^2$ comme étant respectivement les carrés de $x\sqrt{}p'$ et $(a-x)\sqrt{}p$. On peut établir la proportion; $p'xx+p(a-x)^2 : 2\sqrt{}pp'\times x(a-x)=q:2\sqrt{}pp'$.

Mais, $p'xx+2\sqrt{}pp'.\,x(a-x)+p(a-x)^2=(x\sqrt{}p'+(a-x)\sqrt{}p)^2$,
et $p'xx-2\sqrt{}pp'.\,x(a-x)+p(a-x)^2=(x\sqrt{}p'-(a-x)\sqrt{}p)^2$
$=((a-x)\sqrt{}p-x\sqrt{}p')^2$

Donc, $(x\sqrt{}p'+(a-x)\sqrt{}p)^2 : \begin{matrix}(x\sqrt{}p'-(a-x)\sqrt{}p)^2=\\((a-x)\sqrt{}p-x\sqrt{}p')^2\end{matrix}$
$::=q+2\sqrt{}pp':q-2\sqrt{}pp'$

et $x\sqrt{}p'+(a-x)\sqrt{}p : \begin{matrix}x\sqrt{}p'-(a-x)\sqrt{}p\\(a-x)\sqrt{}p-x\sqrt{}p'\end{matrix}$
$=\sqrt{}(q+2\sqrt{}pp'):\sqrt{}(q-2\sqrt{}pp')$.

1°. Soit $x\sqrt{}p'+(a-x)\sqrt{}p : x\sqrt{}p'-(a-x)\sqrt{}p$
$=\sqrt{}(q+2\sqrt{}pp'):\sqrt{}(q-2\sqrt{}pp')$;
$x\sqrt{}p':(a-x)\sqrt{}p$
$=\sqrt{}(q+2\sqrt{}pp')+\sqrt{}(q-2\sqrt{}pp'):\sqrt{}(q+2\sqrt{}pp')-\sqrt{}(q-2\sqrt{}pp')$

$$=\frac{q+\sqrt{}(qq-4pp')}{2}:\sqrt{}pp'$$

$$=\sqrt{}pp':\frac{q-\sqrt{}(qq-4pp')}{2}.$$

$$x:a-x=\frac{q+\sqrt{(qq-4pp')}}{2}:p'$$

$$=p:\frac{q-\sqrt{(qq-4pp')}}{2}.$$

De là ; $a:x=q+2p-\sqrt{(qq-4pp')}:2p$

$a:a-x=q+2p'+\sqrt{(qq-4pp')}:2p'$

$$x=\frac{2ap}{q+2p'+\sqrt{(qq-4pp')}}=a\times\frac{q+2p+\sqrt{(qq-4pp')}}{2(p+p'+q)}.$$

$$a-x=\frac{2ap'}{q+2p+\sqrt{(qq-4pp')}}=a\times\frac{q+2p'-\sqrt{(qq-4pp')}}{2(p+p'+q)}.$$

2°. Soit $x\sqrt{p'}+(a-x)\sqrt{p}:(a-x)\sqrt{p}-x\sqrt{p'}$
$=\sqrt{(q+2\sqrt{pp'})}:\sqrt{(q-2\sqrt{pp'})}$

$x\sqrt{p'}:(a-x)\sqrt{p}$
$=\sqrt{(q+2\sqrt{pp'})}-\sqrt{(q-2\sqrt{pp'})}:\sqrt{(q+2\sqrt{pp'})}+\sqrt{(q-2\sqrt{pp'})}$

$$=\frac{q-\sqrt{(qq-4pp')}}{2}:\sqrt{pp'}$$

$$=\sqrt{pp'}:\frac{q+\sqrt{(qq-4pp')}}{2}.$$

$$x:a-x=\frac{q-\sqrt{(qq-4pp')}}{2}:p'$$

$$=p:\frac{q+\sqrt{(qq-4pp')}}{2}.$$

De là, $a:x=q+2p+\sqrt{(qq-4pp')}:2p.$

$a:a-x=q+2p'-\sqrt{(qq-4pp')}:2p'.$

$$x=\frac{2ap}{q+2p+\sqrt{(qq-4pp')}}=a\times\frac{q+2p-\sqrt{(qq-4pp')}}{2(p+p'+q)}$$

$$a-x=\frac{2ap'}{q+2p'-\sqrt{(qq-4pp')}}=a\times\frac{q+2p'+\sqrt{(qq-4pp')}}{2(p+p'+q)}.$$

On a donc généralement ;

$$x=a\times\frac{q+2p\pm\sqrt{(qq-4pp')}}{2(p+p'+q)};$$

$$a-x=a\times\frac{q+2p'\mp\sqrt{(qq-4pp')}}{2(p+p'+q)}.$$

Rem. 2[de]. Pour que le problème soit possible, on doit avoir $qq \overline{>} 4pp'$; lorsque cela a lieu, la question est résolue dans le sens propre de l'énoncé, suivant lequel q est la somme des deux surfaces, et a la somme des deux bases.

On traitera de même les autres cas, pour lesquels on obtient les équations suivantes.

2[d]. *Cas.* Soit q la somme des deux surfaces ; soit a, l'excès de la base du premier rectangle sur celle du second.

$$\textit{Cond. } p'\times\frac{x}{x-a}+p\times\frac{x-a}{x}=q.$$

$$x=a\times\frac{2p-q\pm\sqrt{(qq-4pp')}}{2(p'+p-q)};$$

$$x-a=a\times\frac{-2p'+q\pm\sqrt{(qq-4pp')}}{2(p'+p-q)}.$$

3^{me}. *Cas.* Soit q l'excès de la première surface sur la seconde, et soit a la somme des deux bases.

$$Cond.\ p' \times \frac{x}{a-x} - p \times \frac{a-x}{x} = q.$$

$$x = a \times \frac{q-2p \pm \sqrt{(qq+4pp')}}{2(p'+q-p)}.$$

$$a-x = a \times \frac{q+2p' \mp \sqrt{(qq+4pp')}}{2(p'+q-p)}.$$

4^{me}. *Cas.* Soit q l'excès de la première surface sur la seconde; et soit a l'excès de la première base sur la seconde.

$$Cond.\ p' \times \frac{x}{x-a} - p\ \frac{x-a}{x} = q.$$

$$x = a \times \frac{q+2p \pm \sqrt{(qq+4pp')}}{2(q+p-p')};$$

$$x-a = \frac{2p'-q \pm \sqrt{(qq+4pp')}}{2(q+p-p')}.$$

5^{me}. *Cas.* Soit q l'excès de la première surface sur la seconde; et soit a l'excès de la seconde base sur la première.

$$Cond.\ p' \times \frac{x}{x+a} - p \times \frac{x+a}{x} = q.$$

$$x=a\times\frac{-q-2p\mp\sqrt{(qq+4pp')}}{2(q+p-p')};$$

$$x+a=\frac{q-2p'\mp\sqrt{(qq+4pp')}}{2(q+p-p')}.$$

Je vais proposer des exemples particuliers qui se réduisent au problème général qui vient de nous occuper.

Une personne qui possède 100000 fr., partage cette somme en deux parties qu'elle fait valoir à deux taux différens d'intérêt, et pour lesquels elle retire en tout 5400 fr. d'intérêt. Si elle faisoit valoir la première partie au même taux que la seconde, elle en retireroit 3600 fr. d'intérêt; et si elle faisoit valoir la seconde partie au même taux que la première, elle en retireroit 2000 fr. d'intérêt.

Deux paysannes ont porté des œufs au marché; la première en a porté huit douzaines de plus que la seconde; elles ont retiré en tout, 38 £. 16 ſ., soit 776 sous. Si la première avoit vendu ses œufs au même prix que la seconde, elle en auroit retiré 24 £., soit 480 sous; et si la seconde avoit vendu ses œufs au même prix que la première, elle en auroit retiré 15 £. 12 s., soit 312 sous.

Deux pièces d'étoffe contiennent entr'elles

deux 120 aunes ; et l'une d'elles a produit 428 fr. de plus que l'autre ; si on alternoit les prix d'une aune de chacune, elles produiroient, l'une 1152 fr., et l'autre 864 fr.

La première de ces pièces contient 24 aunes de plus que l'autre, et elle vaut 540 fr. de plus que la seconde; si on alternoit les prix d'une aune de chacune, la première produiroit 1008 fr. et la seconde 900 fr.

La première de ces pièces contient douze aunes de plus que l'autre; et la seconde a produit 64 fr. de plus que la première : en alternant les prix des aunes de chacune, la première vaut 1520 fr.; et la seconde vaut 1024 fr.

§ 106. *Prob.* Partager un nombre donné a, en deux parties, de manière que le carré d'une des parties soit égal au produit de l'autre partie par un nombre donné $2l$.

Dén. Première partie . . . . x;
Seconde partie . . . . $a-x$.

Cond. $xx=(a-x)2l$.
Réd. $xx+2lx=2al$;
$xx+2lx+ll=ll+2al$; $x+l=\pm\sqrt{(ll+2al)}$,
Sol. $x=\pm\sqrt{(ll+2al)}-l$;

$$a-x=a+l\mp\sqrt{(ll+2al)}.$$
$$xx=2ll+2al\mp2l\sqrt{(ll+2al)};$$
$$=2(al+l\mp\sqrt{(ll+2al)}).$$

Rem. La première solution $x=\sqrt{(ll+2al)}-l$ $a-x=a+l-\sqrt{(ll+2al)}$, répond à la question dans le sens propre de l'énoncé, suivant lequel a est la somme des deux parties cherchées.

La seconde solution $x=-(\sqrt{(ll+2al)}+l)$, $a-x=a+l+\sqrt{(ll+2al)})$; en changeant le signe de x donne $x=\sqrt{(ll+2al)}+l$, $a+x=a+l+\sqrt{(ll+2al)}$; elle répond à la question dans laquelle a est l'excès de la seconde partie sur la première, et elle résout l'équation $xx=(a+x)2l$.

Ex. En vendant un cheval pour 11 louis, un maquignon a gagné pour cent autant que le cheval lui a coûté.

Connoissant le tems qui s'est écoulé depuis le moment où l'on a lâché une pierre du haut d'un puits, jusqu'au moment où l'on a entendu le bruit provenant du choc de cette pierre contre le fond du puits; on demande la profondeur du puits. En connoissant : 1°. l'espace qu'un grave parcourt par sa chute libre dans la première seconde de sa chute;

2°. l'espace parcouru par le son dans le même tems; et en admettant, 1°. que le son se meut uniformément; et, 2°. que les espaces parcourus par les graves croissent comme les carrés des tems écoulés depuis le commencement de leur chute.

Soit $a=2l$; dans ce cas particulier, on demande de partager a en deux parties, telles, que le carré d'une partie soit égal au produit de l'autre partie par le nombre a: en se bornant à la première solution, on a:

$$x=a\times\frac{\sqrt{5}-1}{2};\ \text{et}\ a-x=a\times\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Les parties cherchées sont donc irrationnelles, soit entr'elles, soit avec le nombre à partager: mais on peut approcher de leur rapport autant qu'on le veut en termes rationnels, au moyen de la série.

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144......., dont chaque terme est la somme des deux qui le précèdent.

Dans cette suite, soient pris trois termes successifs; j'affirme que le carré du terme moyen diffère du produit des extrêmes, d'une unité, alternativement en plus et en moins.

$2^2 = 1 \times 3 + 1$; $3^2 = 2 \times 5 - 1$.
$5^2 = 3 \times 8 + 1$; $8^2 = 5 \times 13 - 1$.
$13^2 = 8 \times 21 + 1$; $21^2 = 13 \times 34 - 1$.
$34^2 = 21 \times 55 + 1$; $55^2 = 34 \times 89 - 1$.
etc. etc.

Soient a, b, $a+b$, $a+2b$, quatre termes successifs de cette suite ; qu'on ait prouvé que $bb = a(a+b) \pm 1$; j'affirme que $(a+b)^2 = b(a+2b) \mp 1$.

En effet, aux deux membres de l'équation supposée $bb = a(a+b) \pm 1$, soit ajoutée la même quantité, $b(a+b)$; on aura, $b(a+2b) = (a+b)^2 \pm 1$; ou, $(a+b)^2 = b(a+2b) \mp 1$.

Aut. Prob. Trouver deux nombres dont la différence est a, et qui soient tels que le carré du plus grand soit égal au produit du petit par un nombre donné $2l$.

On a pour condition $(a+x)^2 = 2lx$.
D'où l'on obtient : $x = l - a \pm \sqrt{(ll - 2al)}$.
$a + x = l \pm \sqrt{(ll - 2al)}$.

Rem. Pour que le problème soit possible, on doit avoir $l > 2a$. Alors, $x = a$, et $a + x = 2a$; $(a+x)^2 = 4aa$; $2lx = 4aa$.

J'affirme que la plus petite valeur du quotient $\frac{(a+x)^2}{x}$ est $4a$.

En effet, soit $x=a\pm z$; $a+x=2a\pm z$;
$(a+x)^2=4aa\pm 4az+zz$;

$$\frac{(a+x)^2}{x}=\frac{4aa\pm 4az+zz}{a\pm z}=4a+\frac{zz}{a\pm z}.$$

§ 107. Trouver quatre nombres en proportion géométrique, en connoissant la somme des moyens $2s$, la somme des extrêmes $2s'$, et la somme des carrés des quatre termes $4q$.

Dén. Soit p le produit des moyens, ou le produit des extrêmes.

Demi-différence des moyens, $\sqrt{(ss-p)}$;
Demi-différence des extrêmes, $\sqrt{(s's'-p)}$.

Termes moyens, $s+\sqrt{(ss-p)}$, $s-\sqrt{(ss-p)}$.
Termes extrêmes, $s'+\sqrt{(s's'-p)}$, $s'-\sqrt{(s's'-p)}$.

Somme des carrés des moyens, $4ss-2p$.
Somme des carrés des extrêmes, $4s's'-2p$.
Somme des quatre carrés, $4ss+4s's'-4p$.

Cond. $4ss+4s's'-4p=4q$.
Réd. $ss+s's'-p=q$.
Sol. $p=ss+s's'-q$.

$ss-p=q-s's'$; $s's'-p=q-ss$.

Proportion; $s'+\sqrt{(q-ss)}$, $s+\sqrt{(q-s's')}$, $s-\sqrt{(q-s's')}$, $s'-\sqrt{(q-ss)}$.

$4ss-2p=2ss+2q-2s's'$.
$4s's'-2p=-2ss+2q+2s's'$.

Vér. $4ss+4s's'-4p=4q$.

Ex.

Ex. Soit $2s = \frac{14}{34}$, $2s' = \frac{18}{46}$, $4q = \frac{340}{2312}$.

Rem. 1re. Relativement au produit des extrêmes ou des moyens, le problème proposé est du premier degré; mais il est du second degré relativement à la différence des extrêmes ou à la différence des moyens, et partant, relativement à chacun de ces termes.

Rem. 2de. L'expression trouvée de la somme des quatre carrés, $4ss + 4s's' - 4p$, nous apprend que la somme des carrés de la somme des extrêmes et de la somme des moyens est égale à la somme de la somme des carrés des quatres termes, et de quatre fois le produit des extrêmes ou des moyens.

En effet, soient a, b, c, d, quatre termes en proportion.

$$\left.\begin{array}{l}(a+d)^2 = aa + 2ad + dd \\ (b+c)^2 = bb + 2bc + cc\end{array}\right. \text{. Donc, } (a+d)^2 + (bc)^2$$
$$= aa + bb + cc + dd + 2bc + 2ad.$$
$$= aa + bb + cc + dd + 4bc \text{ (ou } 4ad\text{)}.$$

Rem. 3me. Pour que le problème soit possible, on doit avoir $q \overline{\gtrless} ss$, $q \overline{\gtrless} s's'$; savoir : dans toute proportion géométrique, la somme des carrés des quatre termes n'est pas plus petite que le carré de l'une ou de l'autre des deux sommes des extrêmes ou des moyens.

J'affirme que la somme des carrés des quatre termes est égale à la somme des carrés de la somme des extrêmes et de la différence des moyens, ou à la somme des carrés de la différence des extrêmes et de la somme des moyens.

En effet, $(a\pm d)^2 = aa \pm 2ad + dd$,

$(b\mp c)^2 = bb \mp 2bc + cc$,

donc, $(a\pm d)^2 + (b\mp c)^2 = aa + bb + cc + dd$,

(puisque $ad = bc$).

Aut. Prob. On donne la différence des extrêmes, la différence des moyens, et la somme des quatre carrés.

On donne la somme ou la différence des extrêmes, la différence ou la somme des moyens, et la différence de la somme des carrés des extrêmes et de la somme des carrés des moyens. (Cet énoncé général renferme des cas indéterminés.)

On donne le produit des extrêmes ou des moyens; la somme ou la différence de la somme des extrêmes et de la somme des moyens, et la somme ou la différence de la somme des carrés des extrêmes et de la somme des carrés des moyens.

On donne la somme des extrêmes et la somme

des moyens, ou la différence des extrêmes et la différence des moyens; et la somme des cubes des quatre termes, ou l'excès de la somme des cubes des extrêmes sur la somme des cubes des moyens.

On donne la somme des extrêmes et la somme des moyens, ou la différence des extrêmes et la différence des moyens; et la somme des quatrièmes puissances des quatre termes, ou l'excès de la somme des quatrièmes puissances des extrêmes sur la somme des quatrièmes puissances des moyens.

On donne la somme des quatre termes, la somme de leurs carrés, et la somme de leurs cubes.

On donne l'excès de la somme des extrêmes sur la somme des moyens, l'excès de la somme des carrés des extrêmes sur la somme des carrés des moyens, et l'excès de la somme des cubes des extrêmes sur la somme des cubes des moyens.

Comme ces deux derniers exercices peuvent paroître compliqués, je vais développer l'un d'eux, par exemple, le premier.

Soit $4s$ la somme donnée des quatre termes,
$4q$ la somme donnée de leurs carrés.
$4c$, la somme donnée de leurs cubes.

Dén. Soit la différence de la somme des extrêmes et de la somme des moyens, $4x$.

Somme des extrêmes,	$2s+2x$,
Somme des moyens,	$2s-2x$,

Soit p le produit des extrêmes ou des moyens.

Demi-différence des extrêmes $\sqrt{((s+x)^2-p)}$.

$$\text{Termes extrêmes} \quad \begin{matrix} s+x+\sqrt{((s+x)^2-p)} \\ s+x-\sqrt{((s-x)^2-p)} \end{matrix},$$

$$\text{Termes moyens} \quad \begin{matrix} s-x+\sqrt{((s-x)^2-p)}. \\ s-x-\sqrt{((s-x)^2-p)}. \end{matrix}$$

Somme des carrés des extrêmes,	$4(s+x)^2-2p$.
Somme des carrés des moyens,	$4(s-x)^2-2p$
Somme des quatre carrés,	$8(ss+xx)-4p$.
Somme des cubes des extrêmes,	$8(s+x)^3-6(s+x)p$.
Somme des cubes des moyens,	$8(s-x)^3-6(s-x)p$
Somme des quatre cubes,	$16s(ss+3xx)-12sp$.

$$\textit{Cond.} \left\{ \begin{matrix} 8\,(ss+xx)-\quad 4p=4q. \\ 16s(ss+3xx)-12sp=4c. \end{matrix} \right.$$

$$\textit{Réd.} \quad \begin{matrix} 2(ss+\ xx)-\quad p=q \\ 4s(ss+3xx)-3sp=c \end{matrix}.$$

De ces deux équations on tire :

$$\textit{Sol.} \quad \begin{matrix} xx=\dfrac{2s^3-3sq+c}{6s}. \\ p=\dfrac{8s^3-6sq+c}{3s}. \end{matrix}$$

Ex. Soit $4s=\begin{smallmatrix}24\\20\end{smallmatrix}$, $4q=\begin{smallmatrix}260\\170\end{smallmatrix}$; $4c=\begin{smallmatrix}3328\\1820\end{smallmatrix}$.

§ 108. Le problème suivant est dèstiné à montrer d'une manière plus particulière qu'on ne l'a fait jusqu'à présent, comment une question étant susceptible de plusieurs cas, on peut tirer de la solution de l'un d'entr'eux celle de tous les autres, par le simple changement de signe des quantités qui entrent dans les formules relatives à ce cas, conformément aux différences qui ont lieu dans les énoncés de ces différens cas.

Prob. Trouver un nombre, tel, que le carré de ce nombre soit au produit des sommes ou des différences de ce nombre et de deux nombres donnés, dans un rapport donné (1).

Soient a et b les deux nombres donnés. Soit le rapport donné du carré au produit celui de q à p.

---

(1) Ce problème, traité avec les détails et les distinctions qui l'accompagnent, prendroit au plus grand nombre des élèves un tems trop considérable, pour qu'il soit possible de les suivre dans l'enseignement public. Mais, ces détails me paroissent propres à fortifier dans le calcul, traité d'une manière raisonnée, ceux des élèves studieux qui en feront l'objet de leurs travaux domestiques. J'en dis autant de quelques-uns des développemens auxquels ont donné lieu divers problèmes de ce chapitre, pour lesquels il convient de se régler sur la force de la majeure partie des étudians.

Soit x le nombre cherché.

Le problème proposé, énoncé généralement, donne lieu aux différens cas qui suivent.

1°. Les deux facteurs du produit, sont l'un et l'autre la somme du nombre cherché et des nombres donnés, ou ils en sont l'un et l'autre les différences. La seconde supposition donne lieu aux trois formes suivantes du produit: $(x-a)(x-b)$, $(a-x)(b-x)$, $(x-a)(b-x)$.

2°. Les deux facteurs du produit sont, l'un, la somme du nombre cherché et d'un des nombres donnés, et l'autre, la différence du nombre cherché et de l'autre des nombres donnés. Cette supposition donne lieu aux deux formes suivantes de ce produit $(x+a)(b-x)$, $(x+a)(x-b)$.

Le problème proposé paroît donc donner lieu à six cas; mais il règne entr'eux une liaison si intime, que les formules relatives à l'un de ces cas peuvent servir) avec les changemens que dicte la différence des suppositions) à résoudre tous les autres.

Et d'abord, soient exécutés les deux produits $(x-a)(x-b)$, $(a-x)(b-x)$: comme ces deux produits ne diffèrent que par les signes de leurs facteurs deux à deux, ils sont les

mêmes, savoir, $xx - x(a+b) + ab$ ou $ab - x(a+b) + xx$. Et partant, quand on opère sur ce produit, sans remonter à son origine, on ne sait si l'on résout l'un ou l'autre de ces deux cas. Il y a donc entr'eux la liaison la plus intime.

Ensuite, le produit, $(x+a)(x+b)$, ne diffère du produit $(x-a)(x-b)$ que par les signes de a et de b; et partant, les formules relatives au second de ces produits, donnent les formules relatives au premier, en changeant les signes de a et de b.

De même, le produit $(x+a)(x-b)$ diffère du produit $(x-a)(x-b)$ seulement par le signe de a; ou il diffère du produit $(x+a)(x+b)$ seulement par le signe de b.

Le produit $(x-a)(b-x)$, diffère du produit $(x-a)(x-b)$ par le signe du facteur $b-x$. Donc aussi, les exposans des rapports de ces deux produits au même carré xx, diffèrent l'un de l'autre par le signe; et partant, les formules relatives au produit $(x-a)(x-b)$, donneront les formules relatives au produit $(x-a)(b-x)$, en changeant le signe de l'exposant $\frac{p}{q}$; ce qui se fait en changeant le signe de p.

Enfin, le produit $(x+a)(b-x)$, diffère du

produit $(x-a)(b-x)$ seulement par le signe de a; ou bien, le produit $(x+a)(b-x)$ diffère du produit $(x+a)(x-b)$ seulement par le signe de p.

Après ces observations préliminaires, je passe à la solution de l'un des cas proposés; par exemple, à celui qui est relatif à la forme $(x-a)(x-b)$ du produit, en faisant marcher collatéralement le cas relatif à la forme $(a-x)(b-x)$, vu que ces deux formes donnent le même produit $xx-x(a+b)+ab$.

Soit donc, $xx:xx-(a+b)+ab=q:p$.

1^re^. *Supposition.* Soit $q=p$; $x(a+b)=ab$;

$x=\frac{ab}{a+b}$, $x-a=-\frac{aa}{a+b}$; $a-x=\frac{aa}{a+b}$;

$x-b=-\frac{bb}{a+b}$; $b-x=\frac{bb}{a+b}$. Partant, cette supposition donne lieu au produit $(a-x)(b-x)$. On a, $a-x:x=a:b=x:b-x$.

2^de^. *Supp.* Soit $q>p$; de la première proportion $xx:xx-x(a+b)+ab=q:p$; on tire: $xx(q-p)-qx(a+b)+qab=0$; de là,

$$x=\frac{q(a+b)\pm\sqrt{(qq(a-b)^2+4pqab)}}{2(q-p)}.$$

$$x-a=\frac{2ap-q(a-b)\pm\sqrt{(qq(a-b)^2+4pqab)}}{2(q-p)}.$$

$$a-x=\frac{q(a-b)-2ap\mp\sqrt{(qq(a-b)^2+4pqab)}}{2(q-p)}.$$

$$x-b=\frac{2bp+q(a-b)\pm\sqrt{(qq(a-b)^2+4pqab)}}{2(q-p)}.$$

$$b-x=\frac{-2bp-q(a-b)\mp\sqrt{(qq(a-b)^2+4pqab)}}{2(q-p)}.$$

3^{me}. *Supp.* Soit $q<p$;

$$x=\frac{-q(a+b)\mp\sqrt{(qq(a-b)^2+4pqab)}}{2(p-q)};$$

$$x-a=\frac{-2ap+q(a-b)\mp\sqrt{(qq(a-b)^2+4pqab)}}{2(p-q)};$$

$$a-x=\frac{2ap-q(a-b)\pm\sqrt{(qq(a-b)^2+4pqab)}}{2(p-q)};$$

$$x-b=\frac{-2bp-q(a-b)\mp\sqrt{(qq(a-b)^2+4pqab)}}{2(p-q)}.$$

$$b-x=\frac{2bp+q(a-b)\pm\sqrt{(qq(a-b)^2+4pqab)}}{2(p-q)}.$$

Rem. 1re. Le radical $\sqrt{(qq(a-b)^2+4pqab)}$ est réel; et partant, le problème proposé est possible dans la seconde et dans la troisième suppositions.

Rem. 2de. Soit $q=p$. La première valeur de x, tirée de la seconde supposition, par exemple, est une expression fractionnaire dont le dénominateur seulement est zéro; et partant, cette première valeur de x est impossible.

La seconde valeur de x

$$\frac{q(a+b)-\sqrt{(qq(a-b)^2+4pqab)}}{2(q-p)},$$ est une

expression fractionnaire dont les deux termes évanouissent en même tems. Pour en trouver la valeur, soit substituée l'addition à la soustraction en multipliant les deux termes par $q(a+b)+\sqrt{(qq(a-b)^2+4pqab)}$; on obtient,

$$x=\frac{2qab}{q(a+b)+\sqrt{(qq(a-b)^2+4pqab)}}=\frac{ab}{a+b},$$

conformément à la 1re. supposition.

Rem. 3me. Dans la supposition $q>p$, les deux valeurs de x sont positives, et les premières valeurs de $x-a$ et de $x-b$ sont aussi positives. J'affirme que les secondes valeurs de $x-a$ et de $x-b$ sont négatives, ou que les secondes valeurs de $a-x$ et de $b-x$, sont positives. En effet,

$$a-x=\frac{\sqrt{(qq(a-b)^2+4pqab)}-(2ap-q(a-b))}{2(q-p)}$$

$$=\frac{2aap}{\sqrt{(qq(a-b)^2+4pqab)}+2ap-q(a-b)}.$$

Or, $qq(a-b)^2+4pqab-(q(a-b)-2ap)^2=4aap(q-p)$; donc, $a-x$ est positif; de même,

$$b-x=\frac{2bbp}{\sqrt{(qq(b-a)^2+4pqab)}+2bp-q(b-a)};$$ et

$4q(b-a)^2+4pqab-(q(b-a)-2bp)^2=4bbp(q-p)$;
donc, $b-x$ est positif.

Partant, dans la supposition $q>p$, on répond en même tems aux deux formes du produit $xx-x(a+b)+ab\ldots\frac{(x-a)(x-b)}{(a-x)(b-x)}$, et on n'a aucune raison d'admettre ou d'exclure l'une seulement de ces deux formes, pour exclure ou pour admettre l'autre. Ces deux formes sont donc liées l'une avec l'autre d'une manière si intime, qu'on ne peut les séparer l'une de l'autre sans s'exposer à résoudre la question proposée d'une manière incomplète.

Rem. 4^me^. Soit $q<p$. La seconde valeur de x est positive, et sa première valeur est négative.

Les valeurs de $a-x$, et de $b-x$, sont l'une et l'autre positives; et comme la première valeur de x est négative, cette première valeur répond à la forme $(a+x)(b+x)$. On résout donc, en même tems, les cas relatifs aux deux formes du produit $(a-x)(b-x)$, $(a+x)(b+x)$.

Partant, la forme $(a-x)(b-x)$, est liée avec les deux formes $\frac{(x-a)(x-b)}{(x+a)(x+b)}$, de manière

qu'une des deux solutions répond toujours à la première forme, et qu'on obtient conjointement avec elle l'une des deux formes $\frac{(x-a)(x-b)}{(x+a)(x+b)}$, suivant qu'on donne $\frac{q>p}{q<p}$; lorsque $q=p$, le problème est du premier degré, et on obtient une solution unique, répondante à la forme $(a-x)(b-x)$.

On auroit pu obtenir la solution qui répond au produit $(x+a)(x+b)$, en changeant les signes de a et de b dans les formules relatives au produit $(x-a)(x-b)$. On obtient :

$$x=\frac{q(a+b)\mp\sqrt{(qq(a+b)^2+4q(p-q)ab)}}{2(p-q)},$$

$$x+a=\frac{2ap-q(a-b)\mp\sqrt{(qq(a-b)^2+4pqab)}}{2(p-q)},$$

$$x+b=\frac{2bp-q(b-a)\mp\sqrt{(qq(b-a)^2+4pqab)}}{2(p-q)}.$$

Appl. à la forme du produit $(x+a)(x-b)$. Dans les formules relatives à la forme $(x-a)(x-b)$, soit changé le signe de a. On obtient,

$$x=\frac{q(a-b)\mp\sqrt{(qq(a+b)^2-4pqab)}}{2(p-q)},$$

$$=\frac{q(b-a)\pm\sqrt{(qq(a+b)^2-4pqab)}}{2(q-p)};$$

$$x+a=\frac{2ap-q(a+b)\mp\sqrt{(qq(a+b)^2-4pqab)}}{2(p-q)},$$

$$=\frac{q(a+b)-2ap\pm\sqrt{(qq(a+b)^2-4pqab)}}{2(q-p)};$$

$$x-b=\frac{-2bp+q(a+b)\mp\sqrt{(qq(a+b)^2-4pqab)}}{2(p-q)}$$

$$=\frac{2bp-q(a+b)\pm\sqrt{(qq(a+b)^2-4pqab)}}{2(q-p)}.$$

Pour que le problème soit possible, on doit avoir, $q\overline{\overline{>}}p.\frac{4ab}{(a+b)^2}$.

Soit $q=p\times\frac{4ab}{(a+b)^2}$; $x=\frac{2ab}{a-b}$;

$x+a=a\times\frac{a+b}{a-b}$; $x-b=b\times\frac{a+b}{a-b}$.

Ces valeurs sont positives, impossibles, ou négatives, suivant qu'on a $a>b$, $a=b$, $a<b$.

Soit $p=q$; la seconde valeur de x est impossible, l'équation $xx=(x+a)(x-b)$ $=xx+x(a-b)-ab$, donne $x(a-b)=ab$; ou $x=\frac{ab}{a-b}$.

Pour obtenir cette valeur de la formule

$$x=\frac{q(a-b)+\sqrt{(qq(a-b)^2-4q(p-q)ab)}}{2(p-q)},$$

soient multipliés les deux termes de le fraction par $q(a-b)+\sqrt{(qq(a-b)^2-4q(p-q)ab)}$; on obtient, $x=\frac{4q(p-q)ab}{2(p-q)(q(a-b)+\sqrt{qq(a-b)^2-4q(p-q)ab})}$

$=\frac{ab}{a-b}$ lorsque $p=q$. $x+a=\frac{aa}{a-b}$, $x-b=\frac{bb}{a-b}$.

Ces valeurs sont positives, impossibles, ou négatives, suivant qu'on a $a>b$, $a=b$, $a<b$.

La valeur négative de x répond à la forme $(x-a)(x+b)$, dans laquelle les quantités a et b prennent l'une la place de l'autre.

Soit $p>q$; $a>b$, les deux valeurs de x sont positives.
$a=b$, les deux valeurs de x sont imaginaires.
$a<b$, les deux valeurs de x sont négatives.

Soit $p<q$; des deux valeurs de x la première est positive, la seconde est négative.

Appl. à la forme du produit $(x+a)(b-x)$. Cette forme diffère de la précédente $(x+a)(x-b)$, par les signes des seconds facteurs. Partant, dans les formules relatives à la forme $(x+a)(x-b)$, soit changé le signe de p; on obtient :

$$x=\frac{q(b-a)\pm\sqrt{qq(b-a)^2+4q(p+q)ab}}{2(q+p)}.$$

Des deux valeurs de x la première est positive, la seconde est négative; et cette der-

nière répond à la forme $(b+x)(x-a)$, dans laquelle les quantités a et b ont pris l'une la place de l'autre.

Appl. à la forme du produit $(x-a)(b-x)$. Dans les formules relatives à la forme $(x+a)(b-x)$; soit changé le signe de a. On obtient :

$$x=\frac{q(b+a)\pm\sqrt{(qq(b+a)^2-4q(p+q)ab)}}{2(p+q)}.$$

Pour que le problème soit possible, on doit avoir $q \overline{>} p\times\frac{4ab}{(a-b)^2}$.

Soit $q=p\times\frac{4ab}{(a-b)^2}$; $x=\frac{2ab}{a+b}$;

$x-a=a\times\frac{b-a}{b+a}$; $b-x=b\times\frac{b-a}{b+a}$.

Soit $q>p\times\frac{4ab}{(a-b)^2}$; les deux valeurs de x sont l'une et l'autre positives.

Rem. 5^{me}. Soient exécutés les produits proposés, suivant les différentes formes de leurs facteurs : on obtient :

$$(a-x)(b-x)=\quad xx-x(a+b)+ab$$
$$(x-a)(x-b)=\quad xx-x(a+b)+ab$$
$$(x+a)(x+b)=\quad xx+x(a+b)+ab$$
$$(x+a)(x-b)=\quad xx+x(a-b)-ab$$
$$(x+a)(b-x)=-xx-x(a-b)+ab$$
$$(x-a)(b-x)=-xx+x(a+b)-ab.$$

Les deux premiers de ces produits ont la même forme.

Le troisième de ces produits diffère des deux premiers par les signes de a et de b.

Le quatrième de ces produits diffère du second par le signe de a.

Le cinquième de ces produits diffère du quatrième par les signes de ses termes.

Le sixième diffère du cinquième par le signe de a ; ou bien, il diffère des deux premiers par le signe.

Aut. exerc. Soient quatre nombres donnés a et a', b et b' ; trouver un cinquième nombre, tel, que le produit des sommes ou des différences des deux premiers nombres donnés et du nombre cherché, soit au produit des sommes ou des différences des deux autres nombres donnés et du nombre cherché, dans un rapport donné (1).

(1) Cet exercice et le problème qui le précède, considérés algébriquement, sont relatifs au problème qui a occupé les anciens sous le nom de section déterminée, on peut l'énoncer comme il suit :

Soient quatre points donnés sur une droite : trouver sur cette droite un cinquième point, tel; que le rectangle de ses distances à deux des points donnés, soit au rectangle de ses distances aux deux autres points donnés, dans un rapport donné.

Aut.

Aut. exerc. Soient donnés des nombres quelconques, a, a', a'', a''', a^{IV} ...... a^{N}. On demande un nombre tel, que si on prend la somme des carrés des sommes ou des différences de ce nombre et des nombres donnés, cette somme soit donnée.

Item : pour l'excès de la somme de quelques-uns de ces carrés sur la somme des carrés des autres.

Item : pour le rapport de la somme (ou des différences) de quelques-uns de ces carrés, à la somme (ou aux différences) des autres carrés.

Item : pour les produits de ces carrés par des coefficiens donnés m, m', m'', m''', ...

§ 109. Nous avons vu un grand nombre de questions, dans lesquelles les quantités données dépendent les unes des autres, de manière que l'une d'elles est déterminée par les autres à être contenue entre certaines limi-

---

Lorsque les deux premiers points ou les deux derniers points, coïncident, l'énoncé revient à celui du problème dont nous avons donné la solution détaillée.

Les solutions géométriques dont ce problème est susceptible, sont remarquables par leur simplicité et par leur élégance.

tes ; ou à obtenir une plus grande ou une plus petite valeur, qui porte le nom de *maximum* ou de *minimum*. La doctrine des *maxima* et des *minima* trouve des applications fréquentes dans les mathématiques mixtes, et elle ne peut être traitée d'une manière complète qu'au moyen des secours que fournissent les mathématiques sublimes. Cependant, lorsque les quantités dont on cherche le *maximum* ou le *minimum* ne contiennent pas des puissances de l'inconnue supérieures à la seconde, on peut déterminer aisément le cas où elles obtiennent leur plus grande ou leur plus petite valeur si elles en sont susceptibles, d'après la doctrine des quantités impossibles ou imaginaires, comme il suit.

Soit la quantité dont on cherche le *maximum* ou le *minimum*, égalée à une quantité *m*. Soit résolue l'équation qu'on obtient en traitant cette dernière quantité *m* comme connue. Si la quantité radicale dans laquelle l'inconnue est exprimée, est la différence de deux ou de plusieurs termes, il y a lieu à un *maximum* ou à un *minimum*, et on l'obtient en égalant à zéro la quantité radicale; et partant, on obtient la quantité inconnue en la faisant égale à la quantité qui est hors

du signe radical. Je dois encore la connoissance de cette règle, à feu Mr. LE SAGE. Je vais l'éclaircir par quelques exemples.

1er. *Ex.* On demande de partager une quantité p en deux facteurs dont la somme soit la plus petite possible.

Soient ces deux facteurs, x et $\frac{p}{x}$.

Cond. $x+\frac{p}{x}=m$.

Réd. $xx+p=mx$; $xx-mx+p=o$; $xx-mx+\frac{1}{4}mm=\frac{1}{4}mm-p$.
$x-\frac{1}{2}m=\frac{\pm\sqrt{(mm-4p)}}{2}$, $x=\frac{m\pm\sqrt{(mm-4p)}}{2}$;
$\frac{p}{x}=\frac{2p}{m\pm\sqrt{(mm-4p)}}=\frac{m\mp\sqrt{(mm-4p)}}{2}$.

Pour que x soit réelle, on doit avoir $mm\overline{\gtrless}4p$; et $m\overline{\gtrless}2\sqrt{p}$; partant, la plus petite valeur de m est $2\sqrt{p}$; et alors, $x=\frac{1}{2}m=\sqrt{p}$; $\frac{p}{x}=\frac{1}{2}m=\sqrt{p}$.

Partant, pour décomposer un produit donné en deux facteurs, dont la somme soit la plus petite possible, il faut décomposer ce produit en deux facteurs égaux entr'eux.

Rem. 1re. Dans la quantité radicale $\sqrt{(mm-4p)}$, du carré de la quantité m on doit retrancher

la quantité donnée $4p$; partant, la somme des deux facteurs est susceptible d'une limite en petitesse, ou m a une plus petite valeur.

Rem. 2[de]. Ce problème est l'inverse de celui qui est développé dans les §§ 87 et 97, dans lesquels, la somme de deux facteurs étant donnée, on a déterminé la limite en grandeur de leur produit.

Rem. 3[me]. On peut démontrer synthétiquement la limite trouvée, comme il suit :

Soit, $x=c\sqrt{p}$; $\frac{p}{x}=\frac{\sqrt{p}}{c}$; $x+\frac{p}{x}=\frac{\sqrt{p}(cc+1)}{c}$.

Or, en supposant c différent de l'unité $cc+1>2c$;

donc, $\frac{cc+1}{c}>2$; donc, $\sqrt{p}\times\frac{cc+1}{c}>2\sqrt{p}$.

On pourroit aussi démontrer ce *minimum*; d'après le *maximum* du produit des deux parties d'une somme donnée, lorsque ces deux parties sont égales entr'elles.

2[d]. *Ex.* Décomposer une somme donnée $2q$, en deux parties, de manière que la somme de leurs racines soit la plus grande possible.

Soit m le *maximum* cherché, traité comme connu.

Soient x et $\sqrt{(2q-xx)}$ les deux racines cherchées, on aura $x+\sqrt{(2q-xx)}=m$; $\sqrt{(2q-xx)}=m-x$, $2q-xx=mm-2mx+xx$;

$2xx-2mx+mm=2q$; $4xx-4mx+2mm=4q$;
$4xx-4mx+mm=4q-mm$; $x=\frac{m\pm\sqrt{(4q-mm)}}{2}$.

Pour que x soit réelle, $mm\overline{\overline{<}}4q$; donc, la plus grande valeur de mm est $4q$; et alors, $m=2\sqrt{q}$; $x=\frac{1}{2}m=\sqrt{q}$; et $\sqrt{(2q-xx)}=\sqrt{q}$.

Partant, la plus petite valeur de la somme des deux racines a lieu lorsquelles sont égales entr'elles.

Rem. 1^re^. Comme la quantité sous le signe radical $4q-mm$ est l'excès de la quantité connue $4q$, sur la quantité mm dont on cherche la limite, cette dernière est relative à un *maximum* de m.

Rem. 2^de^. Que les deux parties, au lieu d'être l'une et l'autre q, soient l'une $q+z$, et l'autre $q-z$. On doit avoir $\sqrt{(q+z)}+\sqrt{(q-z)}<2\sqrt{q}$.

En effet $(\sqrt{(q+z)}+\sqrt{(q-z)})^2=2q+2\sqrt{(qq-zz)}<4q$.

Rem. 3^me^. Cette question, quant à la limite, est l'inverse de celle qui est contenue dans les §§ 88 et 98. La limite en grandeur de la somme des racines auroit pu être tirée de la limite en petitesse de la somme des carrés dont on connoît la somme des racines.

Ex. ultérieur. Soient a et b, α et β, des nombres donnés. Soit donnée la somme

$axx+byy$, on demande le *maximum* de la somme $\alpha x+\beta y$.

3^{me}. *Ex.* Soit donnée la différence q de deux carrés. On demande la plus petite valeur de l'excès du produit de la plus grande des deux racines par un nombre donné a, sur le produit de l'autre racine par un autre nombre donné b, plus petit que le premier.

Dén. Soient x et $\sqrt{(q+xx)}$ les deux racines. Soit m la plus petite valeur cherchée de la différence des produits $a\sqrt{(q+xx)}$ et bx.

Cond. $a\sqrt{(q+xx)}-bx=m$.

Réd. $a\sqrt{(q+xx)}=m+bx$;

$$aa(q+xx)=(m+bx)^2$$

$$xx(aa-bb)-2mbx=mm-aaq;$$

de là, $x(aa-bb)-bm=a\sqrt{(mm-q(aa-bb))}$.

Limite. Pour que x soit réelle, $mm \overline{>} q(aa-bb)$; donc, la plus petite valeur de m est $\sqrt{(q(aa-bb))}$;

et alors, $x=\dfrac{bm}{aa-bb}=\dfrac{b\sqrt{q}}{\sqrt{(aa-bb)}}$;

$$\sqrt{(q+xx)}=\frac{a\sqrt{q}}{\sqrt{(aa-bb)}}.$$

Donc, $x:\sqrt{(q+xx)}=b:a$;

et $bx:a\sqrt{(q+xx)}=bb:aa$ (1).

---

(1) Ce petit problème est le fondement du procédé, par lequel M^r. Le Sage a le premier résolu par les

4^me^. *Ex.* Soit donnée la différence *d* de deux quantités. On demande que la troisième proportionnelle à la plus petite et à la plus grande de ces deux quantités soit la plus petite possible.

Dén. Soient les deux quantités cherchées x et $x+d$. La troisième proportionnelle à ces

---

élémens, d'une manière aussi ingénieuse qu'elle est élégante, le problème célèbre, relatif au fond des alvéoles des abeilles. Désirant avec raison, rendre accessibles, autant qu'il est possible, aux amateurs des sciences naturelles, les applications des Mathématiques, il regardoit comme important de les simplifier, et de les ramener autant qu'on le peut, à des procédés purement élémentaires. Ses recherches sur cette application intéressante, trouveront sans doute place dans ses méditations sur les causes finales, qui doivent paroître, par les soins d'un de ses amis bien en état de les rédiger, Mr. REVERDIL. Je les ai déjà fait connoître, en partie, dans les *Mémoires de Berlin 1781.* et dans mon Ouvrage qui a pour titre: *De Relatione mutuâ capacitatis et terminorum Figurarum*, Vars. 1782, à l'occasion du développement d'un *minimum minimorum*, relatif auxdits alveoles, que je me proposois de traiter comme but principal; et j'y joignis, de son consentement, ce qu'il avoit développé de ses Recherches sur cet objet, à moi et à quelques-uns de nos compatriotes. Voyez aussi ma *Polygonométrie* p. 116.

deux quantités est $\frac{(x+d)^2}{x}$. Soit le *minimum* cherché $2m$.

Cond. $\frac{(x+d)^2}{x}=2m$.

Réd. $xx+2dx+dd=2mx$; $xx+2x(d-m)+dd=0$;
$xx+2x(d-m)+(d-m)^2=mm-2dm$.
$x+(d-m)=\sqrt{(m(m-2d))}$.

Lim. Pour que la valeur de x soit réelle, on doit avoir $m \overline{\geq} 2d$; et partant, la plus petite valeur de m est $2d$; et alors, $x=m-d=d$.

Sol. $x=d$; $x+d=2d$; $\frac{(x+d)^2}{x}=\frac{4dd}{d}=4d$.

Vér. Soit fait, $x=d\pm z$; j'affirme que $\frac{(2d\pm z)^2}{d\pm z}>4d$.

$$\frac{(2d\pm z)^2}{d\pm z}=\frac{4dd\pm 4dz+zz}{d\pm z}=4d+\frac{zz}{d\pm z}.$$

En général, on demande que $\frac{(a+x)(b+x)}{x}$ soit le plus petit possible.

Soit $\frac{(a+x)(b+x)}{x}=m$.

Réd. $xx+x(a+b)+ab=mx$; $xx-x(m-(a+b)+ab)=0$;
$4xx-4x(m-(a+b))+(m-(a+b))^2=(m-(a+b))^2$
$2x-(m-(a+b))=\sqrt{((m-(a+b))^2-4ab)}$.

Lim. Pour que x soit réelle, on doit avoir $m-(a+b)\overline{\geq}2\sqrt{ab}$; $m\overline{\geq}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

Partant, la plus petite valeur de m est $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$; et alors, $2x=m-(a+b)=2\sqrt{ab}$.

Sol. $x=\sqrt{ab}$; $a+x=\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$; $b+x=\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$.

$$\frac{(a+x)(b+x)}{x}=\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{\sqrt{ab}}=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2.$$

5^{me}. *Ex.* Soient a et b deux nombres donnés dont a est le plus grand; on demande que la formule $\frac{(x+a)(x-b)}{xx}$ soit la plus grande possible.

Cond. $\frac{(x+a)(x-b)}{xx}=m$.

Réd. $xx+x(a-b)-ab=mxx$;

$$xx(m-1)-x(a-b)+ab=0;$$

$$4xx(m-1)^2-4(a-b)(m-1)x+(a-b)^2$$
$$=(a-b)^2-4ab(m-1)=(a+b)^2-4mab.$$
$$2x(m-1)-(a-b)=\sqrt{((a+b)^2-4mab)}.$$

Lim. Pour que x soit réelle, on doit avoir $m\overline{\overline{<}}\frac{(a+b)^2}{4ab}$; $m-1=\frac{(a-b)^2}{4ab}$. Alors,

Sol. $x=\frac{2ab}{a-b}$; $a+x=\frac{a(a+b)}{a-b}$; $x-b=\frac{b(a+b)}{a-b}$.

$$(x+a)(x-b)=\frac{ab(a+b)^2}{(a-b)^2};\quad \frac{(x+a)(x-b)}{xx}=\frac{(a+b)^2}{4ab}.$$

Vér. Si on fait $x = \frac{2ab}{a-b} \pm z$, on trouve que la formule répondante à $\frac{2ab}{a-b}$, surpasse la formule répondante à $\frac{2ab}{a-b} \pm z$, de la quantité positive $\frac{zz(a-b)^2}{4ab(\frac{2ab}{a-b} \pm z)}$.

6^{me}. *Ex.* Partager une quantité donnée $2a$ en deux parties, de manière que la somme de la plus grande et de la troisième proportionnelle à la plus grande et à la plus petite soit la plus petite possible.

Dén. Différence cherchée des deux parties, ... $2x$;
Parties cherchées . . . . . $a+x$, $a-x$.

Cond. $(a+x) + \frac{(a-x)^2}{a+x} = m$.

Réd. $\frac{2(aa+xx)}{a+x} = m$; $2xx - mx + 2aa = ma$;
$16xx - 8mx + mm = mm + 8ma - 16aa = (m+4a)^2 - 32aa$;
$4x - m = \sqrt{((m+4a)^2 - 32aa)}$.

Lim. Pour que x soit réelle, on doit avoir $m + 4a \geqq 4a\sqrt{2}$; et partant, la plus petite valeur de m est $4a(\sqrt{2} - 1)$. Alors,

Sol. $x=a(\sqrt{2}-1)$; $a+x=a\sqrt{2}$;
$a-x=a(2-\sqrt{2})=a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$.
$\frac{(a-x)^2}{a+x}=a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2$. $a+x+\frac{(a-x)^2}{a+x}$
$a\sqrt{2}(4-2\sqrt{2})=2a\sqrt{2}(2-\sqrt{2})=4a(\sqrt{2}-1)$.

7[me]. *Ex.* Partager une somme donnée $2a$ en deux parties, de manière que la somme des quotiens qu'on obtient quand on les divise mutuellement l'un par l'autre, soit la plus petite possible.

Dén. Soit $2x$ la différence des deux parties cherchées; et partant, soient ces deux parties $a+x$, $a-x$.

Cond. $\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}=m$.

Réd. $\frac{2(aa+xx)}{aa-xx}=m$; $xx(m+2)=aa(m-2)$;
$xx=aa\times\frac{m-2}{m+2}$; $x=a\sqrt{\left(\frac{m-2}{m+2}\right)}$.

Lim. Pour que x soit réelle, on doit avoir $m\overline{>}2$; partant, la plus petite valeur de m est 2. Alors,

Sol. $x=o$; $a+x=a$, $a-x=a$;
$\frac{a+x}{a-x}=1$; $\frac{a-x}{a+x}=1$; $\frac{a-x}{a+x}+\frac{a-x}{a+x}=2$.

J'affirme que $\frac{a+x}{a-x}+\frac{a-x}{a+x}\overline{>}2$.

En effet, $\frac{2(aa+xx)}{aa-xx}=2(1+\frac{2xx}{aa-xx})$.

Ex. plus général. Soient p et q deux nombres donnés, on demande la plus petite valeur de la somme $p\times\frac{x}{a-x}+q\times\frac{a-x}{x}$.

On trouve pour la plus petite valeur de m, $2\sqrt{pq}$; et que les valeurs correspondantes de x et de $a-x$, sont $a\times\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$, $a\times\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$.

8^{me}. Partager une somme donnée $2a$ en deux parties, de manière que la somme de leurs inverses soit la plus petite possible.

Dén. Soit $2x$ la différence des deux parties cherchées; et partant, soient ces deux parties $a+x$ et $a-x$.

Cond. $\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}=m$.

Réd. $\frac{2a}{aa-xx}=m$; $2a=aam-mxx$;

$xx=a\times\frac{am-2}{m}$.

Lim. Pour que x soit réelle, on doit avoir $am\overline{>}2$; partant, la plus petite valeur de m est $\frac{2}{a}$; alors,

Sol. $x=o$; $a+x=a=a-x$.

Rem. $\frac{2a}{aa-xx}$ est le plus petit, lorsque $aa-xx$ est le plus grand; c'est-à-dire, lorsque $x=o$.

Ex. plus général. Soient p et q des nombres donnés; on demande la plus petite valeur de la somme $\frac{p}{x}+\frac{q}{a-x}$.

On trouve, pour la plus petite valeur de m $\frac{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2}{a}$; pour les valeurs correspondantes de x et de $a-x$, $a\times\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$, $a\times\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}$;

et partant, pour les valeurs de $\frac{p}{x}$ et de $\frac{q}{a-x}$,

$\frac{\sqrt{p}(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{a}$, $\frac{\sqrt{q}(\sqrt{p}+\sqrt{q})}{a}$.

9^{me}. *Ex.* Soient deux nombres dont le produit p est donné. A chacun d'eux soit ajouté un même nombre donné a, et soient pris les carrés des deux sommes. On demande la plus petite valeur de la somme de ces carrés.

Dén. Soient $2x$ et $2y$ la somme et la différence des deux nombres cherchés : et soit $2m$ le *minimum* cherché.

Cond. $\begin{cases} xx - yy = p. \\ (x+y+a)^2 + (x-y+a)^2 = 2m. \end{cases}$

Réd. $\begin{matrix} xx - yy = p \\ 2(x+a)^2 + 2yy = 2m \end{matrix}$ ou, $\begin{matrix} xx - yy = p \\ (x+a)^2 + yy = m. \end{matrix}$

De là, $2xx + 2ax + aa = p + m$;

$4xx + 4ax + 2aa = 2(p+m)$;

$2x + a = \sqrt{(2(p+m) - aa)}$; $x = \dfrac{\sqrt{(2(p+m) - aa)} - a}{2}$.

Puisque $xx - yy = p$
et $(x+a)^2 + yy = m$. $(2x+a)a + 2yy = m - p$;
ou, $a\sqrt{(2(p+m) - aa)} + 2yy = m - p$;
et $2yy = m - p - a\sqrt{(2(p+m) - aa)}$.

Lim. Pour que yy soit positive; et partant, pour que y soit réelle : on doit avoir,
$m - p \geqq a\sqrt{(2(p+m) - aa)}$; $(m-p)^2 \geqq 2aap + 2aam - a^4$
$mm - 2m(aa+p) + pp \geqq 2aap - a^4$;
$mm - 2m(aa+p) + (aa+p)^2 \geqq 4aap$.
$m - (aa+p) \geqq 2a\sqrt{p}$; $m \geqq (a+\sqrt{p})^2$. Partant, la plus petite valeur de m est $(a+\sqrt{p})^2$; alors, $m + p = aa + 2a\sqrt{p} + 2p$.
$2(m+p) - aa = aa + 4a\sqrt{p} + 4p = (a + 2\sqrt{p})^2$;
$m - p = aa + 2a\sqrt{p} = a(a + 2\sqrt{p})$;
et $2yy = a(a+2\sqrt{p}) - a(a+2\sqrt{p}) = 0$.
et $x = \dfrac{\sqrt{(aa + 4a\sqrt{p} + 4p)} - a}{2} = \dfrac{(a+2\sqrt{p}) - a}{2} = \sqrt{p}$.

Partant, lorsqu'on connoît le produit de deux quantités, la somme des carrés des quan-

tités qu'on obtient quand on ajoute à chacune d'elles un même nombre donné a est la plus plus petite, lorsqu'elles sont égales entr'elles.

§ 110. Je vais terminer cette section par la récapitulation des différentes formes sous lesquelles peuvent se présenter, tant les équations complètes du second degré que les racines de ces équations.

Soit dégagé le carré de l'inconnue de tout coefficient, soit ce carré précédé du signe de l'addition. Soit $2p$ le coefficient du second terme ou de celui qui contient l'inconnue simple; et soit q le troisième terme. Soient transportés tous les termes d'un même côté du signe de l'égalité. Le premier membre de l'équation est de l'une des quatre formes suivantes.

I°. $xx-2px+q$; II°. $xx-2px-q$;
III°. $xx+2px-q$; IV°. $xx+2px+q$;

On peut les réunir sous la forme générale, $xx\pm 2px\pm q$; et partant, on peut présenter toutes les équations du second degré comme il suit, $xx\pm 2px\pm q=0$.

	Racines.	Facteurs du premier membre.
I°.	$x= p\pm\sqrt{(pp-q)}$.	$(x-p-\sqrt{(pp-q)})(x-p+\sqrt{(pp-q)})$
II°.	$x= p\pm\sqrt{(pp+q)}$.	$(x-p-\sqrt{(pp+q)})(x-p+\sqrt{(pp+q)})$
III°.	$x=-p\pm\sqrt{(pp+q)}$.	$(x+p-\sqrt{(pp+q)})(x+p+\sqrt{(pp+q)})$
IV°.	$x=-p\pm\sqrt{(pp-q)}$.	$(x+p-\sqrt{(pp-q)})(x+p+\sqrt{(pp-q)})$.

A la seconde et à la troisième de ces formes répondent des racines réelles ; ces racines sont, l'une positive et l'autre négative, de manière que les racines positives et négatives alternent dans les deux formes. La somme des racines de la seconde forme est $2p$, la somme des racines de la troisième forme est $-2p$; savoir, pour l'une et pour l'autre le coefficient du second terme en changeant son signe ; ces sommes sont proprement la différence des deux racines supposées affectées du même signe. Le produit de ces deux racines est $-q$. Partant, la solution de ces deux formes revient à trouver deux nombres dont on connoît la différence et le produit,

A la première et à la quatrième de ces formes peuvent répondre des racines imaginaires. Les racines de la première forme sont l'une et l'autre positives; celles de la quatrième, sont l'une et l'autre négatives, de manière que ces dernières ne diffèrent des premières que par le signe. La somme des racines de la première forme est $+2p$; la somme des racines de la quatrième est $-2p$. Le produit de ces deux racines et $+q$. Partant, la solution de ces deux formes revient à trouver deux nombres dont on connoît la somme et le produit.

Le

Le premier membre de l'équation de la première forme se décompose en deux facteurs de la forme $(x-a)(x-b)$ ou $(a-x)(b-x)$. Et le premier membre de la quatrième forme se décompose en deux facteurs de la forme $(x+a)(x+b)$. Le premier membre des équations de la seconde et de la troisième forme se décompose en deux facteurs de la forme $(x+a)(x-b)$ ou $(x-a)(x+b)$.

La première forme et la quatrième donnent lieu à une limite de la valeur de q relativement à p; savoir : la plus grande valeur de q est pp; alors, les deux valeurs de x sont égales entr'elles, savoir, $+p$ pour la première forme, et $-p$ pour la seconde.

TROISIÈME SECTION.

Des Equations bicarrées.

On traite à la manière des équations du second degré les équations qui renferment trois termes, dont le premier contient l'inconnue élevée à la quatrième puissance ; dont le second contient l'inconnue élevée à la seconde puissance, et dont le troisième ne contient que

des quantités connues. Ces équations appelées *bicarrées* sont donc de la forme $x^4 \pm 2px^2 \pm q = o$. Faisant $x^2 = z$; elles sont ramenées à la forme $z^2 \pm 2pz \pm q = o$ des équations du second degré : il suffira d'en donner un petit nombre d'exemples.

§ 111. Trouver deux nombres dont le produit est p, et dont la somme des carrés est $2q$.

Dén. Soit un des nombres x; l'autre sera $\frac{p}{x}$.

Cond. $xx + \frac{pp}{xx} = 2q$.

Réd. $x^4 + pp = 2qxx$.

$x^4 - 2qxx + pp = o$; $x^4 - 2qxx + qq = qq - pp$.

$xx - q = \pm\sqrt{(qq - pp)}$; $xx = q \pm \sqrt{(qq - pp)}$.

Sol. $x = \sqrt{(q \pm \sqrt{(qq - pp)})}$;

$$\frac{p}{x} = \frac{p}{\sqrt{(q \pm \sqrt{(qq - pp)})}} = \sqrt{(q \mp \sqrt{(qq - pp)})}.$$

$$xx = q \pm \sqrt{(qq - pp)}; \quad \frac{pp}{xx} = \quad q \mp \sqrt{(qq - pp)}).$$

Vér. $xx + \frac{pp}{xx} = 2q$.

Rem. Dans le § 91[me], ce problème a été ramené immédiatement à des équations pures du second degré.

§ 112. *Probl.* Trouver deux nombres dont

le produit est p, et dont la différence des carrés est $2q$.

Dén. Soit le nombre regardé comme le plus grand . . . x; l'autre sera . . $\frac{p}{x}$.

Cond, $xx - \frac{pp}{xx} = 2q$.

Réd. $x^4 - pp = 2qxx$; $x^4 - 2qxx - pp = 0$; $x^4 - 2qxx + qq = qq + pp$; $xx - q = \pm\sqrt{(qq+pp)}$; $xx = q \pm \sqrt{(qq+pp)} = q + \sqrt{(qq+pp)}$.

Sol. $x = \sqrt{(\sqrt{(qq+pp)} + q)}$;

$$\frac{p}{x} = \frac{p}{\sqrt{(\sqrt{(qq+pp)}+q)}} = \sqrt{(\sqrt{(qq+pp)} - q)}.$$

$$xx = \sqrt{(qq+pp)} + q;\ \frac{pp}{xx} = \sqrt{(qq+pp)} - q.$$

$xx - \frac{pp}{xx} = 2q$. Voy. le § 92.

§ 113. *Prob.* Trouver deux nombres dont on connoît la somme $2s$, et la somme des quatrièmes puissances $2q$.

Dén. Différence des nombres cherchés $2x$.
Nombres cherchés . . . $s+x$, $s-x$.

4^mes^. Puissances, $s^4 + 4s^3x + 6ssxx + 4sx^3 + x^4$.
$s^4 - 4s^3x + 6ssxx - 4sx^3 + x^4$.

Somme $2s^4 \quad + 12ssxx \quad + 2x^4$.

Cond. $2s^4+12ssxx+2x^4=2q$.

Réd. $x^4+6ssxx+s^4 \quad =q$.

$x^4+6ssxx+9s^4=q+8s^4$

$xx+3ss=\pm\sqrt{}(q+8s^4)$.

$xx=-3ss\pm\sqrt{}(q+8s^4)=\sqrt{}(q+8s^4)-3ss$

(en admettant seulement la solution positive).

Sol. $x=\sqrt{}(\sqrt{}(q+8s^4)-4ss)$.

$s+(=s+\sqrt{})\sqrt{}(q+8s^4(-3ss)$

$s-x=s-\sqrt{}(\sqrt{}(q+8s^4(-3ss)$.

Ex. Soit $\begin{array}{llll} 2s= & 8, & 8, & 6, \\ 2q= & 1320, & 706, & 4080. \end{array}$

Rem. 1[re]. Pour que le problème soit possible, on doit avoir $q+8s^4 \geqq 9s^4$ ou $q \geqq s^4$.

Rem. 2[de]. Pour que le problème soit résolu dans le sens propre de l'énoncé, on doit avoir $q \leqq 8s^4$, ou $2q \leqq 16s^4 \leqq (2s)^4$.

Si on donne $2q > 16s^4$, les formules répondent à la question dans laquelle on demande deux nombres dont on connoît la différence et la somme des quatrièmes puissances.

En effet, les deux questions relatives l'une à la somme donnée des deux nombres, et l'autre à leur différence, conduisent à une même équation, pour déterminer leur différence dans la première, et leur somme dans la seconde.

Rem. 3^{me}. Au lieu de chercher les nombres demandés par leur différence, soient cherchés ces nombres par leur produit.

Soit p le produit cherché, la demi-différence sera $\sqrt{(ss-p)}$.

Ces deux nombres seront $\begin{matrix} s+\sqrt{(ss-p)} \\ s-\sqrt{(ss-p)} \end{matrix}$,

et la somme de leurs quatrièmes puissances est $2(s^4+6ss(ss-p)+(ss-p)^2)=2(8s^4-8ssp+pp)=2q$.

On a donc, $pp-8ssp+8s^4=q$;
de là, $p=4ss\pm\sqrt{(q+8s^4)}$.
$ss-p=-3ss\mp\sqrt{(q+8s^4)}$.

Rem. 4^{me}. Au lieu de chercher les nombres demandés d'une manière médiate, soit cherché chacun d'eux immédiatement, comme il suit :

Soit l'un des nombres . . . . x,
L'autre sera, ... $2s-x$.

Somme des 4mes puissances, $16s^4-32s^3x+24ssxx-8sx^3+2x^4$.
Cond. $2x^4-8sx^3+24ssxx-32s^3x+16s^4=2q$.
Réd. $x^4-4sx^3+12ssxx-16s^3x+8s^4-q=0$.

La résolution de cette équation paroît d'une difficulté supérieure à celle des équations qui nous ont occupés jusqu'à présent. Mais, on la ramène à l'équation $x^4+6ssxx+s^4=q$, en faisant $x=s\pm z$.

Rem. 5^{me}. Les deux problèmes suivans conduisent à des équations supérieures à celles du second degré.

1°. Trouver deux nombres dont on connoît la somme, et la différence des quatrièmes puissances.

2°. Trouver deux nombres dont on connoît la différence, et la somme des quatrièmes puissances.

Aut. ex. Trouver deux nombres dont on connoît la somme et la somme des cinquièmes puissances. Trouver deux nombres dont on connoît la différence, et la différence des cinquièmes puissanoes.

§ 114. *Prob.* Trouver quatre nombres en proportion géométrique, en connoissant, la somme des moyens $2s$, la somme des extrêmes $2s'$, et la somme $4q$ des quatrièmes puissances des quatre termes.

Dén. Soit la différence des termes moyens $2x$.
Termes moyens . . . . . . $s+x$, $s-x$.
Produit des moyens ou des extrêmes, $ss-xx$.
Carré de la demi-différence des extrêmes, ... $s's'-ss+xx$.
Termes extrêmes $s'+\sqrt{(s's'-ss+xx)}$, $s'-\sqrt{(s's'-ss+xx)}$.
Somme des quatrièmes puissances des moyens, $2(s^4+6ssxx+x^4)$.

Somme des quatrièmes puissances des extrêmes, $2(8s^4 - 8sss's' + s^4 + 2xx(4s's' - ss) + x^4)$.
Somme des quatrièmes puissances des quatre termes, $4(4s'^4 - 4sss's' + s^4 + 2xx(2s's' + ss) + x^4)$.

Cond. $x^4 + 2xx(2s's' + ss) + (2s's' - ss)^2 = q$.

Réd. $x^4 + 2xx(2s's' + ss) + (2s's' + ss)^2 = q + 8sss's'$.

Sol. $xx = \sqrt{(q + 8sss's')} - (2s's' + ss)$.

$$ss - xx = 2(ss + s's') - \sqrt{(q + 8sss's')}$$

$$s's' - ss + xx = \sqrt{(q + 8sss's')} - (2ss + s's').$$

Ex. $s = 5;\ s' = 7;\ q = 5576.$
$s = 5,\ s' = 5;\ q = 1681.$

Rem. 1re. Pour que le problème soit possible, on doit avoir,

1°. $(2s's' + ss)^2 \leqq q + 8sss's'$; ou, $q \geqq (2s's' - ss)^2$.
2°. $4(ss + s's')^2 \geqq q + 8sss's'$; ou, $q \leqq 4(s^4 + s'^4)$.
3°. $(2ss + s's')^2 \leqq q + 8sss's'$; ou, $q \geqq (2ss - s's')^2$.

Rem. 2de. La détermination du produit des extrêmes ou des moyens dépend seulement d'une équation du second degré. Soit p ce produit. On obtient :

Demi-différence des moyens, $\sqrt{(ss - p)}$.
Demi-différence des extrêmes, $\sqrt{(s's' - p)}$.
Moyens, $s + \sqrt{(ss - p)}$, $s - \sqrt{(ss - p)}$.
Extrêmes $s' + \sqrt{(s's' - p)}$, $s' - \sqrt{(s's' - p)}$.

Somme des quatrièmes puissances des moyens

$2(s^4+6ss(ss-p)+(ss-p)^2)$

$=2(pp-8ssp+8s^4)$

Somme des quatrièmes puissances des extrêmes $2(pp-8s's'p+8s'^4)$.

Somme des quatrièmes puissances des quatre termes, $4(pp-4(ss+s's')p+4(s^4+s'^4))$.

Cond. $pp-4(ss+s's')p+4(s^4+s'^4)=q$.

Réd. $pp-4(ss+s's')p+4(ss+s's')^2=q+8sss's'$

$p=2(ss+s's')\pm\sqrt{(q+8sss's')}$

Aut. ex. On connoît la somme des extrêmes, la somme des moyens, et l'excès de la somme des quatrièmes puissances des extrêmes sur la somme des quatrièmes puissances des moyens.

Item : pour les différences tant des extrêmes que des moyens.

Item : pour les cinquièmes puissances.

Trouver quatre nombres en proportion géométrique, en connoissant leur somme, la somme de leurs carrés, et de la somme de leurs quatrièmes puissances.

Item : on connoît la somme, la somme des cubes, et la somme des cinquièmes puissances.

La question suivante est destinée à montrer d'une manière plus frappante encore qu'on ne l'a fait jusqu'à présent, combien l'introduc-

tion des expressions symétriques des quantités cherchées, peut avoir d'influence sur la simplicité de la recherche d'une question.

§ 115. *Prob.* Trouver deux nombres dont on connoît la somme p de leur produit et du produit de leur somme par un nombre donné a, et dont on connoît aussi la somme $2q$ de la somme de leurs carrés et du produit de leur somme par un nombre donné $2b$.

Dén. Somme des nombres cherchés $2x$. Différence, $2y$. Nombres cherchés $x+y$, $x-y$. Produit, $xx-yy$. Somme des carrés, $2(xx+yy)$.

Cond. $\begin{cases} xx-yy+2ax=p. \\ 2(xx+yy)+4bx=2q. \end{cases}$

Réd. Aux membres de la seconde équation soient ajoutés les doubles des membres de la première, on obtient, $4xx+4x(a+b)=2(p+q)$; et de là; $x=\dfrac{-(a+b)\pm\sqrt{((a+b)^2+(p+q))}}{2}$.

Des membres de la seconde équation soient retranchés les doubles des membres de la première, on obtient, $4xx-4x(a-b)=2(q-p)$.

De là, substituant à x sa valeur, on obtient : $4yy=2(q-p)-2(aa-bb)\pm 2(a-b)\sqrt{((a+b)^2+2(p+q))}$.

Ex. Soit $a=b$; $x=\dfrac{-2a\pm\sqrt{(4aa+2(p+q))}}{2}$; $yy=\dfrac{q-p}{2}$.

Rem. 1[re]. La valeur négative de x répond à la question dans laquelle le produit des deux quantités cherchées est diminué du produit de leur somme par a, et la somme des carrés des quantités cherchées est diminuée du produit de leur somme par $2b$; cette valeur répond aux deux équations,

$$xx-yy-2ax=p$$
$$2(xx+yy)-4bx=2q.$$

Rem. 2[de]. On peut employer dans les dénominations et dans les conditions une seule inconnue pour déterminer la somme des nombres cherchés. En effet, soit $2x$ cette somme; le produit des deux nombres cherchés est $p-2ax$; le carré de leur demi-différence est $xx-(p-2ax)=xx+2ax-p$. La somme de leurs carrés est $2(2xx+2ax-p)$; d'où l'on obtient la même équation $4xx+4ax=2(p+q)$.

Rem. 3[me]. La recherche immédiate de la différence cherchée conduit à une équation bicarrée. En effet, on obtient :

$$2yy+2x(b-a)=q-p\,;\quad x=\frac{q-p-2yy}{2(b-a)},$$

$$xx=\frac{(q-p)^2-4(q-p)yy+4y^4}{4(b-a)^2};$$

$$xx-yy+2ax=\frac{4y^4-4(q-p+bb-aa)yy+(q-p)^2+4a(b-a)(g-p)}{4(b-a)^2}=p.$$

De là, on obtient la valeur de yy comme précédemment.

Rem. 4^{me}. Au lieu de chercher médiatement les nombres demandés par leur somme et par leur différence, soient cherchés l'un et l'autre de ces deux nombres z et v immédiatement par les équations.

$$\begin{aligned} zz+vv+2b(z+v)&=2q. \\ vz+a(z+v)&=p \end{aligned}$$ On a $z(v+a)=p-av$;

$$z=\frac{p-av}{a+v}; \quad zz=\frac{pp-2apv+aavv}{(a+v)^2};$$

$$z+v=\frac{p+vv}{a+v}=\frac{ap+pv+avv+v^3}{(a+v)^2}.$$

$$zz+vv=\frac{v^4+2av^3+2aavv-2apv+pp}{(a+v)^2};$$ de là,

$$\frac{v^4+2(a+b)v^3+2a(a+b)vv+2p(b-a)v+p(p+2ab)}{(v+a)^2}=2q.$$

$$v^4+2(a+b)v^3+2(a(a+b)-q)vv+\left(\begin{matrix}2p(b-a)\\-4aq\end{matrix}\right)v+\begin{matrix}p(p+2ab)\\-2aaq\end{matrix}=0.$$

Cette équation est affectée de la quatrième puissance de l'inconnue et de toutes les puissances inférieures; et si l'on ne connoissoit pas déjà par le procédé précédent la valeur de v qui est la somme ou la différence des valeurs trouvées de x et de y, il seroit difficile de la déterminer.

Scholie. Le procédé par lequel on résout les équations bicarrées, $x^4 \pm 2px^2 \pm q = o$, s'étend à la résolution des équations $x^{2m} \pm 2px^m \pm q = o$; composées de trois termes; dont le second contient une puissance quelconque de l'inconnue, dont le premier contient une puissance à exposant double de cette inconnue, et dont le troisième terme est connu.

CHAPITRE VIII.

Ebauche de l'Analyse diophantique, relative aux Equations du second degré.

LE plus grand nombre des questions résolues dans le chapitre précédent, mènent à des formules affectées du signe de l'extraction des racines carrées. Dans ce chapitre, je me propose d'ébaucher la partie de l'analyse indéterminée, par laquelle on cherche à rendre rationnelles des quantités affectées de ce signe radical; en exposant seulement les premiers principes de cette doctrine trop étendue et trop difficile pour que je doive la développer en son entier dans le cours auquel cet Ouvrage est destiné. Les élèves qui voudront acquérir sur cet objet des connoissances plus étendues, peuvent consulter l'Ouvrage de DIOPHANTE, qui est regardé comme le fondateur de cette partie de l'Analyse algébrique; et surtout les Ouvrages des Mathématiciens modernes qui ont approfondi ce sujet, parmi lesquels il me suffira de nommer, EULER, LA GRANGE, LE GENDRE, et GAUSS.

§ 116. La relation qui règne entre la somme $2s$ de deux quantités, leur différence $2d$, et leur produit p, est déterminée par l'équation $ss=dd+p$ (§§ 86, 87). Pour que la somme soit exprimée d'une manière rationnelle dans la différence et le produit, il faut que $dd+p$ soit un carré; ce qu'on indique comme il suit, $dd+p=\square$. Comme p se présente sous la forme d'une quantité d'une dimension seulement, on peut toujours résoudre cette équation, en prenant d à volonté, en retranchant son carré d'un autre carré pris à volonté, et en faisant p égal à la différence.

En général, soit une formule contenant une quantité variable, qui se présente sous la forme d'une dimension seulement, soit cette formule égalée à un carré quelconque, on pourra en tirer la valeur de cette variable, dans ce carré et dans les autres termes dela formule.

Dans l'équation précédente $ss=dd+p$, soit regardé p comme déterminé, et d comme inconnue, on doit déterminer d en p de manière que $dd+p$ soit un carré; soit $d+z$ la racine de ce carré; on a,

$dd+p=dd+2dz+zz$; de là, $d=\frac{p-zz}{2z}$;

$d+z=\frac{p+zz}{2z}$; et partant, les quantités s et d sont exprimées en p et en z, comme il suit,

$$s=\frac{p+zz}{2z};\ d=\frac{p-zz}{2z}.\ dd=\frac{pp-2pzz+z^4}{4zz};$$

$$dd+p=\frac{pp+2pzz+z^4}{4zz}=\left(\frac{p+zz}{2z}\right)^2=ss.$$

L'équation, $ss=dd+p$ ou, $ss-dd=p$; revient à trouver deux carrés dont la différence est donnée; c'est ce qu'on peut obtenir d'un nombre de manières aussi grand qu'on le veut, en donnant à z une valeur rationnelle quelconque.

Appl. Trouver un nombre, tel, que si on lui ajoute deux nombres donnés a et b, chacune des deux sommes soit un carré.

Dén. Soit x le nombre cherché.

$$\text{Cond.}\begin{cases}x+a=\square=yy\\ x+b=\square=vv.\end{cases}$$

Donc, $a-b=yy-vv$; et partant, on demande de déterminer les carrés yy et vv, dont la différence $a-b$ est donnée.

On trouve $y=\frac{a-b+zz}{2z}$; $v=\frac{a-b-zz}{2z}$.

$$x=yy-a=\frac{(a-b)^2-2zz(a+b)+z^4}{4zz}$$
$$x=vv-b=\frac{(a-b)^2-2zz(a+b)+z^4}{4zz}=\frac{(a+b-zz)\ -4ab}{4zz}.$$

Rem. Cette solution est indépendante des signes de a et de b, de manière qu'on résout aussi les équations $\begin{matrix} x\pm a=\square \\ x\pm b=\square \end{matrix}$.

On résout aussi les deux équations $\begin{matrix} a-x=\square \\ b-x=\square \end{matrix}$.

Ex. Trouver un nombre tel que, soit qu'on lui ajoute l'unité, soit qu'on lui ôte l'unité, la somme et la différence soient l'une et l'autre des carrés.

On a, $\begin{matrix} x+1=\square=yy \\ x-1=\square=vv \end{matrix}$ $\quad 2=yy-vv.$

$$y=\frac{2+zz}{2z},\ v=\frac{2-zz}{2z},\ x=\frac{z^4+4}{4zz}.$$

$$x+1=\frac{z^4+4zz+4}{4zz}=\left(\frac{zz+2}{2z}\right)^2;$$

$$x-1=\frac{z^4-4zz+4}{4zz}=\left(\frac{zz-2}{2z}\right)^2.$$

Aut. appl. Trouver trois nombres, tels, que si à chacun de leurs produits deux à deux on ajoute des nombres donnés a, b, c, chacune des sommes soit un carré.

Soient

Soient les trois nombres cherchés x, y, z.

$xy+a=\square=pp$;

Cond. $xz+b=\square=qq$;

$yz+c=\square=rr$.

Réd. $xy=pp-a$; $xz=qq-b$;

$y:z=pp-a:qq-b=yz:zz=rr-c:zz$.

Donc, $zz=\frac{(qq-b)(rr-c)}{pp-a}$;

$yy=\frac{(pp-a)(rr-c)}{qq-b}$; $xx=\frac{(pp-a)(qq-b)}{rr-c}$.

En particulier, chacune des trois quantités x, y, z, est rationnelle, si chacune des quantités $pp-a$, $qq-b$, $rr-c$, est un carré.

$xxyy=(pp-a)^2$; $xy=pp-a$, $xy+a=pp$.

$xxzz=(qq-b)^2$; $xz=qq-b$, $xz+b=qq$.

$yyzz=(rr-c)^2$; $yz=rr-c$, $yz+c=rr$.

§ 117. *Prob.* Trouver les expressions de deux nombres carrés dont la somme est un carré.

Soient x et y les racines des nombres cherchés.

Cond. $xx+yy=\square$.

1^er^. *Proc.* Soit $xx+yy=(x+z)^2=xx+2xz+zz$.

$x=\frac{yy-zz}{2z}$; $xx=\frac{y^4-2yyzz+z^4}{4zz}$.

$xx+yy=\frac{y^4+2yyzz+z^4}{4zz}=\left(\frac{yy+zz}{2z}\right)^2$.

Partant, lorsque la somme de deux carrés doit être un carré, les racines de ces trois carrés sont entr'elles comme $\frac{yy-zz}{2z}$, y, $\frac{yy+zz}{2z}$, ou comme les trois quantités, $yy-zz$, $2yz$, $yy+zz$.

Soient prises deux quantités à volonté y et z, dont y soit la plus grande. Soit pris la différence de leur carrés, leur double produit, et la somme de leurs carrés, la somme des carrés de cette différence et de ce produit est égale au carré de la somme, savoir; $(yy-zz)^2+4yyzz=(yy+zz)^2$.

2d. *Procédé.* Soit $xx+yy=(x+\frac{m}{n}y)^2$ $=xx+\frac{2m}{n}xy+\frac{mm}{nn}yy$; $y(1-\frac{mm}{nn})=2\frac{m}{n}x$.

$y=\frac{2mn}{nn-mm}x$; ou, $x:y=nn-mm:2mn$; et partant, x et y, sont entr'elles comme la différence de deux quantités est à leur double produit.

Je vais donner quelques exemples numériques de ce problème, en admettant la notation du premier procédé.

Soient, y, z, $yy-zz$, $2yz$, $yy+zz$,

2,	1;	3,	4,	5;	$5^2 = 3^2 + 4^2$.
3,	2;	5,	12,	13;	$13^2 = 5^2 + 12^2$.
4,	1;	15,	8,	17;	$17^2 = 8^2 + 15^2$.
4,	3;	7,	24,	25;	$25^2 = 7^2 + 24^2$.
5,	2;	21,	20,	29;	$29^2 = 20^2 + 21^2$.
5,	4;	9,	40,	41;	$41^2 = 40^2 + 9^2$.
6,	1;	35,	12,	37;	$37^2 = 12^2 + 35^2$.
6,	5;	11,	60,	61;	$61^2 = 11^2 + 60^2$.
7,	2;	45,	28,	53;	$53^2 = 28^2 + 45^2$.
7,	4;	33,	56,	65;	$65^2 = 33^2 + 56^2$.
7,	6;	13,	84,	85;	$85^2 = 13^2 + 84^2$.
8,	1;	63,	16,	65;	$65^2 = 16^2 + 63^2$.
8,	3;	55,	48;	73;	$73^2 = 48^2 + 55^2$.
8,	5;	39,	80;	89,	$89^2 = 39^2 + 80^2$.
8,	7;	15,	112,	113;	$113^2 = 15^2 + 112^2$.
9,	2;	77,	36,	85;	$85^2 = 36^2 + 77^2$.
9,	4;	65,	72,	97;	$97^2 = 65^2 + 72^2$.
9,	8;	17,	144,	145;	$145^2 = 17^2 + 144^2$.
10,	1;	99,	20,	101;	$101^2 = 20^2 + 99^2$.
10,	3;	91,	60,	109;	$109^2 = 60^2 + 91^2$.
10,	7;	51,	140,	149;	$149^2 = 51^2 + 140^2$.
10,	9;	19,	180,	181;	$181^2 = 19^2 + 180^2$.

Rem. 1re. La solution de la question trouver deux nombres dont la somme des carrés est un carré, renferme la solution de la question, trouver deux nombres dont la différence des carrés est un carré; en effet, puisque $(yy-zz)^2+4yyzz=(yy+zz)^2$;
$(yy+zz)^2-(yy-zz)^2=4yyzz$.

Rem. 2^de^. Réciproquement, un carré aa étant proposé, on peut toujours le décomposer en deux carrés.

En effet, que la racine d'une des parties soit x, l'autre sera $\sqrt{(aa-xx)}$.

Cond. $aa-xx=\square=(a-x)^2vv$; $a+x=(a-x)vv$;
$a+x:a-x=vv:1$; $a:x=vv+1:vv-1$;

$$x=\frac{vv-1}{vv+1}a;\qquad a-x=\frac{2}{vv+1}a;$$

$$a+x=\frac{2vv}{vv+1}a;\quad aa-xx=\frac{4vv}{(vv+1)^2}aa.$$

Ex. Soit $v=2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{4}$

$$\frac{vv-1}{vv+1}=\frac{3}{5},\ \frac{15}{17},\ \frac{35}{37},\ \frac{63}{65},\ \frac{5}{13},\ \frac{7}{25},\ \frac{21}{29},\ \frac{9}{41},$$

$$\frac{2v}{vv+1}=\frac{4}{5},\ \frac{8}{17},\ \frac{12}{37},\ \frac{16}{65},\ \frac{12}{13},\ \frac{24}{25},\ \frac{20}{29},\ \frac{40}{41}.$$

Appl. Dans un triangle rectangle, le carré du côté opposé à l'angle droit est égal à la somme des carrés des autres côtés; partant, les formules trouvées servent à exprimer d'une manière rationnelle les côtés d'un triangle rectangle.

Or, un triangle quelconque est la somme ou la différence de deux triangles rectangles, formés en abaissant une perpendiculaire d'un

dès sommets sur le côté opposé. Partant, on peut exprimer les côtés d'un triangle quelconque d'une manière rationnelle, en sorte que sa hauteur, et partant, sa surface, soient aussi rationnelles.

Soit h la hauteur du triangle, et soient $h\times\frac{zz-yy}{2zy}$, $h\times\frac{zz-vv}{2vz}$, les segmens de la base; les côtés seront $h\times\frac{zz+yy}{2zy}$, $h\times\frac{zz+vv}{2vz}$.
Partant, les deux côtés étant, $v(zz+yy)$, $y(zz+vv)$, les segmens de la base seront $v(zz-yy)$, $y(zz-vv)$; la base sera $v(zz-yy)\pm y(zz-vv)=(zz-vy)(v\pm y)$; et la hauteur sera $2vzy$.

Ex. Soit $z=3$; $v=2$, $y=1$; $v(zz+yy)=20$, $y(zz+vv)=13$; $zz-vy=7$; $v+y=3$; $(zz-vy)(v+y)=21$; $2vzy=12$.

§118. On peut aussi transformer en carré, la formule $xx+myy$.

1^{er}. *Proc.* Soit, $xx+myy=(x+z)^2=xx+2xz+zz$;

$$x=\frac{myy-zz}{2z};\quad x+z=\frac{myy+zz}{2z}.$$

2^d. *Pr.* Soit $xx+myy=(x+\frac{p}{q}y)^2=xx+\frac{2p}{q}xy+\frac{pp}{qq}yy$.

$y(m-\frac{pp}{qq})=\frac{2p}{q}x$; $y=\frac{2pq}{mqq-pp}x$.

$\frac{p}{q}y=\frac{2pp}{mqq-pp}x$. $x+\frac{p}{q}y=\frac{mqq+pp}{mqq-pp}x$.

Partant, lorsque la quantité $m+xxyy$ doit être un carré, les quantités, x, y, $\sqrt{(xx+myy)}$, sont respectivement entr'elles comme les quantités, $mqq-pp$, $2pq$, $mqq+pp$.

$$xx=mmq^4-2mqqpp+p^4;$$
$$myy= \quad 4mqqpp.$$
$$xx+myy=mmq^4+2mqqpp+p^4=(mqq+pp)^2.$$

§ 119. Soit le trinome $xx-2mxy+nyy$ à rendre un carré.

Cond. $xx-2mxy+nyy=\square$.

1$^{\text{er}}$. *Proc.* Soit $xx-2mxy+nyy=(x+z)^2$ $=xx+2xz+zz$; $2x(z+my)=nyy-zz$.

$x=\frac{nyy-zz}{2(my+z)}$; $x+z=\frac{nyy+2myz+zz}{2(my+z)}$.

2$^{\text{d}}$. *Proc.* Soit $xx-2mxy+nyy$

$=(x+\frac{p}{q}y)^2=xx+\frac{2p}{q}xy+\frac{pp}{qq}yy$.

$2x(\frac{p}{q}+m)=y(n-\frac{pp}{qq})$; $x=y\times\frac{nqq-pp}{2q(mq+p)}$;

$x+\frac{p}{q}y=y\times\frac{pp+2mpq+nqq}{2q(mq+p)}$.

Partant, les quantités x, y, et $\sqrt{(xx-2mxy+nyy)}$ sont entr'elles comme les quantités, $nqq-pp$, $2q(mq+p)$, $nqq+2mpq+pp$, q et p étant des quantités rationnelles quelconques. En particulier, soit $m=o$, $n=1$; les quantités x, y, $\sqrt{(xx+yy)}$, sont entr'elles comme les quantités, $qq-pp$, $2pq$, $qq+pp$, (conformément au § 117).

3e. *Proc.* $xx-2mxy+nyy=xx-2mxy+mmyy+(n-mm)yy$; et partant, la formule est réduite à celle du § précédent.

§120. La circonstance particulière que le coefficient du carré d'une des inconnues est un carré, rend facile la solution de la question proposée dans tous les problèmes précédens.

Si une des inconnues x entre comme facteur dans tous les termes de la formule proposée, il est encore facile d'en faire un carré.

En effet, soit $mxx+nxy=\frac{pp}{qq}xx$;

$mx+ny=\frac{pp}{qq}x$; $x(\frac{pp}{qq}-m)=ny$; $x=\frac{nqq}{pp-mqq}y$.

$mx=\frac{mnqq}{pp-mqq}y$; $mx+ny=\frac{npp}{pp-mqq}y$;

$x(mx+ny)=\frac{nnppqq}{(pp-mqq)^2}=(\frac{npq}{pp-mqq})^2$.

Partant, les quantités x, y, et $\sqrt{(mxx+nxy)}$ sont entr'elles comme les quantités, nqq, $pp-mqq$, npq.

La formule $mxx+nxy$ est le produit des deux facteurs x et $mx+ny$. La question est aisément résoluble toutes les fois que la formule proposée peut se décomposer en deux facteurs rationnels.

Soit $(mx+ny)(m'x+n'y)$ une formule proposée à rendre un carré.

Soit fait $(mx+ny)(m'x+n'y)=\frac{pp}{qq}(mx+ny)^2$;

$m'x+n'y=\frac{pp}{qq}(mx+ny)$; $x(m'-m\frac{pp}{qq})=y(n\frac{pp}{qq}-n')$.

$x=\frac{npp-n'qq}{m'qq-mpp}y$; $mx+ny=\frac{qq(m'n-mn')}{m'qq-mpp}y$;

$m'x+n'y=\frac{pp(m'n-mn')}{m'qq-mpp}y$. Partant, la quantité $(mx+ny)(m'x+n'y)$ devant être un carré, les quantités, x, y, $mx+ny$, $m'x+n'y$, doivent être entr'elles comme les quantités, $npp-n'qq$, $m'qq-mpp$, $qq(m'n-mn')$, $pp(m'n-mn')$, en prenant pour m, n, m', n', p et q des quantités rationnelles quelconques.

Une formule $axx+2bxy+cyy$, étant proposée, pour déterminer si ce procédé peut lui être appliqué, on cherchera si les racines

de l'équation $axx+2bxy+cyy=o$, en regardant x, par exemple, comme inconnue, sont rationnelles; dans lequél cas, cette formule peut être décomposée en facteurs rationnels.

Or, l'équation, $axx+2bxy+cyy=o$, donne $ax+by=\pm y\sqrt{(bb-ac)}$; et $axx+2bxy+cyy$

$$=\frac{(ax+y(b+\sqrt{(bb-ac)}))(ax+y(b-\sqrt{(bb-ac)}))}{a};$$

partant, la formule $axx+2bxy+cyy$ peut se décomposer en facteurs rationnels, et partant, elle peut être rendue un carré par le procédé de ce §, lorsque $bb-ac$ est un carré.

Ex. 1er. Soit $m(xx-yy)$ à rendre un carré. $m(xx-yy)=m(x-y)(x+y)$; on trouve: $x:y=mqq+pp:mqq-pp$.

Ex. 2d. Soit $6xx+13xy+6yy=\square$.

On trouve, $6xx+13xy+6yy=(3x+2y)(2x+3y)$;

et partant,	x,	y,	$3x+2y$,	$2x+3y$, sont
respect.	$3qq-2pp$,	$3pp-2qq$,	$5qq$,	$5pp$.

Pour que les valeurs de x et de y soient l'une et l'autre positives, on doit avoir,

$$qq>\tfrac{2}{3}pp>\tfrac{6}{9}pp;\ qq<\tfrac{3}{2}pp<\tfrac{6}{4}pp;\ \text{ou}\ \frac{q}{p}>\tfrac{1}{3}\sqrt{6}<\tfrac{1}{2}\sqrt{6}.$$

$$\text{Or, } \sqrt{6}=\tfrac{49}{20} \text{ environ; donc, } \frac{q}{p}>\tfrac{49}{60}<\tfrac{49}{40},$$

$$\text{ou } \frac{p}{q}<\tfrac{60}{49}>\tfrac{40}{49}; \text{ partant, si } q=49, p<60>40;$$

soit $p=56$; ou $q=7$, $p=8$; $x=19$, $y=94$; $3x+2y=245$; $2x+3y=320$; $(3x+2y)(2x+3y)$ $=245.320=25.49.64$.

Ex. 3^me^. Soit proposée la formule, $15xx+38xy+24yy$ à rendre un carré. On a, $a=15$, $b=19$, $c=24$; $bb=361$; $ac=360$; $bb-ac=1$; de là, $15xx+38xy+24yy$ $=(3x+4y)(5x+6y)$.

Partant, x et y sont entr'elles comme $4pp-6qq$ et $5qq-3pp$; soit $q=4$, $p=5$; $x=4$, $y=5$, $3x+4y=32=2\times4^2$; $5x+6y=50=2\times5^2$. $15xx+38xy+24yy=2^2\times4^2\times5^2$.

§ 121. Lorsque dans la formule $axx+bxy+cyy$, la somme des coefficiens a, b, c, est un carré, cette formule peut encore être transformée en un carré.

En effet, soit fait $x=y+z$; on aura $axx+bxy+cyy=(a+b+c)yy+(2a+b)yz+azz$, soit $a+b+c=mm$; on doit avoir $mmyy$ $+(2a+b)zy+azz=\square$. Partant, la question est ramenée au § 119.

Ex. 1^er^. Soit $2xx+2yy=\square$; soit $x=y+z$,

$$2(xx+yy)=4yy+4yz+2zz=(\frac{p}{q}z-2y)^2.$$

De là : $z=\dfrac{4q(p+q)}{pp-2qq}y$; $x=\dfrac{pp+4pq+2qq}{pp-2qq}y$.

Rem. $2xx+2yy=(2y+z)^2+zz$; partant, cet exemple est ramené au § 117; on auroit pu obtenir immédiatement cette réduction, en faisant $x=z+v$, $y=z-v$; $2(xx+yy)=4(zz+vv)$.

Ex. 2[d]. Soit $2xx-yy=\square$; on a $2-1=1$. Soit $x=y+z$. $2xx-yy=yy+4zy+2zz$

$$=(\frac{p}{q}z-y)^2, \text{ de là, } z(\frac{pp}{qq}-2)=2y(2+\frac{p}{q});$$

$$z=\frac{2q(p+2q)}{pp-2qq}y; \quad x=\frac{pp+2pq+2qq}{pp-2qq}y.$$

Ex. 3[me]. Soit $3xx+6xy+7yy=\square$. Soit $x=y+z$; on a,

$$16yy+12yz+3zz=\square=(\frac{p}{q}z-4y)^2;$$

$$\text{de là, } z(\frac{pp}{qq}-3)=4y(\frac{2p}{q}+3).$$

$$z=\frac{4q(2p+3q)}{pp-3qq}y; \quad x=\frac{pp+8pq+9qq}{pp-3qq}y.$$

Ex. 4[me]. Soit $7xx-3xy+5yy=\square$.
Soit $x=y+z$; on a,

$$9yy+11yz+7zz=(\frac{p}{q}z-3y)^2;$$

$$\text{de là, } z(\frac{pp}{qq}-7)=y(11+\frac{6p}{q}).$$

$$z=\frac{q(6p+11q)}{pp-7qq}y; \quad x=\frac{pp+6pq+4qq}{pp-7qq}y.$$

§ 122. Dans le second exemple du § précédent, la formule $2xx-yy$, est la somme du carré xx et du produit $(x+y)(x-y)$. Cette circonstance donne lieu à un autre procédé par lequel on peut la reduire en un carré.

En général, toute formule composée d'un carré, et du produit de deux facteurs binomes, peut être réduite en un carré.

Soit la formule proposée,

$$aaxx+(mx+ny)(m'x+n'y)=(\frac{p}{q}(mx+ny)-ax)^2.$$

$$m'x+n'y=\frac{pp}{qq}(mx+ny)-\frac{2p}{q}ax;$$

$$x=\frac{npp-n'qq}{m'qq+2apq-mpp}y.$$

Ex. 1er. Formule proposée $3xx+7xy+3yy$.
$3xx+7xy+3yy=xx+2xx+7xy+3yy$;
or, $7^2-4.2.3=5^2$; donc,
$2xx+7xy+3yy=(2x+y)(x+3y)$;
et $3xx+7xy+3yy=xx+(2x+y)(x+3y)$.
$=yy+(2y+x)(y+3x)$; partant, la méthode de ce § s'applique à la formule proposée.

On peut aussi regarder la formule proposée comme composée du binome $(x+y)^2$ et du trinome $2xx+5xy+2yy$; et comme $5^2-4.2.2=3^2$; $2xx+5xy+2yy=(2x+y)(x+2y)$; et

partant, $3xx+7xy+3yy=(x+y)^2+(2x+y)(x+2y)$; et partant, on a une seconde manière suivant laquelle la méthode de ce § s'applique à la formule proposée.

Ex. 2^d. Formule proposée $13xx+15xy+7yy$.

Les racines des carrés plus petits que 13, sont 1, 2, 3; et les racines des carrés plus petits que 7 sont 1 et 2; on peut donc tenter pour les parties carrées, y^2, $4y^2$, $(y\pm x)^2$, $(y\pm 2x)^2$, $(y\pm 3x)^2$, $(2y\pm x)^2$, $(2y\pm 2x)^2$, $(2y\pm 3x)^2$, x^2, $4x^2$, $9x^2$.

En faisant ces essais, on trouve :
$13xx+15xy+7yy=(x-y)^2+12xx+17xy+6yy$;
or, $17^2-4.6.12=1$; donc,
$12xx+17xy+6yy=(3x+2y)(4x+3y)$; et partant,
$13xx+15xy+7yy=(x-y)^2+(3x+2y)(4x+3y)$.
Cette manière est la seule dont la formule proposée peut être traitée par la méthode de ce §.

Ex. 3^{me}. Formule proposée $13xx+101yy$.

Les racines des carrés plus petits que 13, sont 1, 2, 3; et les racines des carrés plus petits que 101, sont les dix premiers nombres naturels. Il paroît donc qu'on devroit faire 30 essais de binomes, dont les carrés devroient être retranchés, et même 60 de ces

essais, puisque chaque binome peut être la somme ou la différence de ses termes. Mais, on peut diminuer ce nombre comme il suit.

Soit $x \pm ny$ la racine du carré à retrancher; le reste est $12xx \mp 2nxy + (101 - nn)yy$. Pour que ce reste ait des facteurs réels, on doit avoir $nn \gtrless 12(101 - nn)$, ou $13nn > 12.\ 101$; $169nn > 15756$; et partant, $n > 9$; partant, le seul essai à faire est $n = 10$; retranchant le carré $(x \pm 10y)^2$; il reste $12xx \mp 20xy + yy$. Or, $10^2 - 12.\ 1 = 88$, qui n'est pas un carré; donc, on ne peut employer aucun carré de la forme $(x \pm ny)^2$.

Soit $2x \pm ny$ la racine du carré à retrancher. Le reste est $9xx \mp 4nxy + (101 - nn)yy$; on doit avoir, $4nn > 9(101 - nn)$; $13nn > 909$; $n > 8$. Soit $n = 9$, reste $9xx \mp 36xy + 20yy$; dans ce reste $18^2 - 20.\ 9 = 12^2$; donc, il a des facteurs binomes rationnels, et on obtient :

$$13xx + 101yy = (2x + 9y)^2 + 9xx - 36xy + 20yy.$$

$$= (2x + 9y)^2 + (3x - 10y)(3x - 2y)$$

$$= (2x - 9y)^2 + (3x + 10y)(3x + 2y).$$

Soit $n = 10$; le reste, $9xx \mp 40xy + yy$. ne peut pas être décomposé en facteurs binomes rationnels.

Soit $3x \pm ny$ la racine du carré à retrancher. Le reste est $4xx \mp 6nxy + (101 - nn)yy$. On doit avoir, $9nn \gtrless 4(101 - nn)$; $13nn \gtrless 404$; $n > 5$. Soit $n = 6$. $13xx + 101yy = (3x \pm 6y)^2 + 4xx + 36xy + 65yy$. $18^2 - 4.65 = 4(9^2 - 65) = 4 \times 16$; de là, $4xx \mp 36xy \mp 65yy = (2x \mp 13y)(2x + 5y)$; et partant, $13xx + 101yy = (3x \pm 6y)^2 + (2x \mp 13y)(2x \mp 5y)$; et partant, à cet égard encore le procédé de ce § s'applique à la formule proposée.

Aux autres valeurs de n répondent des restes qui ne peuvent pas être décomposés en facteurs binomes rationnels.

Ce que je viens de développer suffit pour montrer combien peut devenir longue la recherche de l'applicabilité du procédé de ce § à une formule proposée ; et même après toutes les tentatives qu'on peut avoir faites, on n'a pas la certitude, si elles sont inutiles, que la formule proposée ne puisse pas être rendue un carré par quelqu'autre voie. La destination de cet Ouvrage ne me permet pas d'entrer dans de plus grands détails sur ce sujet. Quelqu'intéressant qu'il soit pour les Mathématiciens, et quelque précieux que soient pour eux les travaux des modernes que j'ai déjà cités, ce sujet ne peut cependant être regardé que comme un point particulier d'analyse

algébrique, auquel on ne peut pas sacrifier un tems trop considérable dans l'ensignement public des élémens, dont la durée est limitée. Je crois donc devoir me contenter de l'esquisse que j'ai tracée; et renvoyer pour les détails ultérieurs aux Auteurs déjà cités. En particulier, pour compléter ce sujet, il faudroit copier en son entier le second volume de l'algèbre d'EULER, y comprises les belles additions de LA GRANGE.

Je vais terminer ce chapitre par un petit nombre d'exercices particuliers.

§ 123. *Prob.* Soit $aa+bb$ la somme donnée de deux carrés; on demande de la décomposer de nouveau en deux autres carrés.

Dén. Soient les deux carrés cherchés xx et yy.

Cond. $aa+bb=xx+yy$.

1^er^. *Proc.* $aa-xx=yy-bb$. Soit,

$a-x=\frac{p}{q}(y-b)$, et partant, $a+x=\frac{q}{p}(y+b)$;

partant $2a=\frac{p}{q}(y-b)+\frac{q}{p}(y+b)=$

$\frac{(pp+qq)y+(qq-pp)b}{pq}$. $y=\frac{2apq-(qq-pp)b}{qq+pp}$.

$y-b=\frac{2q(ap-bq)}{qq+pp}$; $y+b=\frac{2p(aq+bp)}{qq+pp}$;

$a-x=$

$$a-x=\frac{2p(ap-bq)}{qq+pp};\quad a+x=\frac{2q(aq+bp)}{qq+pp};$$

$$x=\frac{a(qq-pp)+2bpq}{qq+pp}.$$

2[d]. *Proc.* $xx=aa+bb-yy=(a+\frac{p}{q}(b-y))^2$

$$b+y=\frac{2ap}{q}+\frac{pp}{qq}(b-y);\ y(1+\frac{pp}{qq})=\frac{2ap}{q}+b(\frac{pp}{qq}-1);$$

$$y=\frac{2apq+b(pp-qq)}{pp+qq};\quad b-y=\frac{2q(bq-ap)}{pp+qq};$$

$$\frac{p}{q}(b-y)=\frac{2p(bq-ap)}{pp+qq};\ x=a+\frac{p}{q}(b-y)=\frac{2bpq-a(pp-qq)}{pp+qq}.$$

Ex. Soit $a=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\ldots\ldots$
$b=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\ldots\ldots$

Rem. Les nombres, $2pq$, $pp-qq$, $pp+qq$, qui composent les coefficiens de a et de b, sont les nombres trouvés dans le § 117, pour exprimer d'une manière rationnelle les côtés d'un triangle rectangle.

Appl. Soit a un nombre donné. On demande s'il est possible de lui ajouter et de lui ôter un même nombre, de manière que la somme et la différence soient l'une et l'autre des carrés. Si cela est possible, on demande la manière de l'exécuter.

Soit z le nombre cherché.

On doit avoir : $a+z=\square$, $a-z=\square$; partant, $2a$ doit être la somme de deux carrés. J'affirme que si le double d'un nombre est la somme de deux carrés, ce nombre lui même est aussi la somme de deux carrés. En effet, soit $pp+qq=2a$; soit $p=s+d$, $q=s-d$; $pp+qq=2ss+2dd$; donc, $2ss+2dd=2a$; et $a=ss+dd$.

On doit avoir : $\begin{array}{l} ss+dd+z=\square \\ ss+dd-z=\square \end{array}$.

Soit $ss+dd+z=xx$; $z=xx-(ss+dd)$; $ss+dd-z=2(ss+dd)-xx=pp+qq-xx=\square=yy$; donc, $pp+qq=xx+yy$; et partant, la question est réduite à celle de ce §.

On détermine de même la possibilité ou l'impossibilité de rendre en même tems des carrés les deux formules $a+x$, $b-x$.

Prob. Soient a et b deux nombres donnés ; soient x et y deux nombres cherchés. On demande de résoudre les deux équations,

$xx+a(x+y)=\square$

$yy+b(x+y)=\square$.

Soit $xx+a(x+y)=(x+z)^2=xx+2xz+zz$; $x(a-2z)+ay=zz$.

Soit $yy+b(x+y)=(y+v)^2=yy+2yv+vv$; $bx+y(b-2v)=vv$.

De ces deux équations, soient tirées les valeurs de x et de y en a, b, z, v; on trouve,

$$x=\frac{avv-bzz+2vzz}{2(av+bz-2vz)};\ y=\frac{bzz-avv+2zvv}{2(av+bz-2vz)};$$

$$x+y=\frac{2vz(z+v)}{2(av+bz-2vz)};\ x+z=\frac{avv+2vz(a-z)+bzz}{2(av+bz-2vz)};$$

$$y+v=\frac{bzz+2vz(b-v)+avv}{2(av+bz-2vz)}.$$

$$(x+z)^2-xx=\frac{2avz(v+z)}{2(av+bz-2vz)}.$$

$$(y+v)^2-yy=\frac{2bvz(v+z)}{2(av+bz-2vz)}.$$

Donc, les valeurs assignées pour x et pour y satisfont bien aux deux équations.

Rem. On résout de la même manière chacune des équations $\begin{matrix} xx\pm a(x+y)=\square \\ yy\pm b(x+y)=\square \end{matrix}$.

Fin du premier volume.

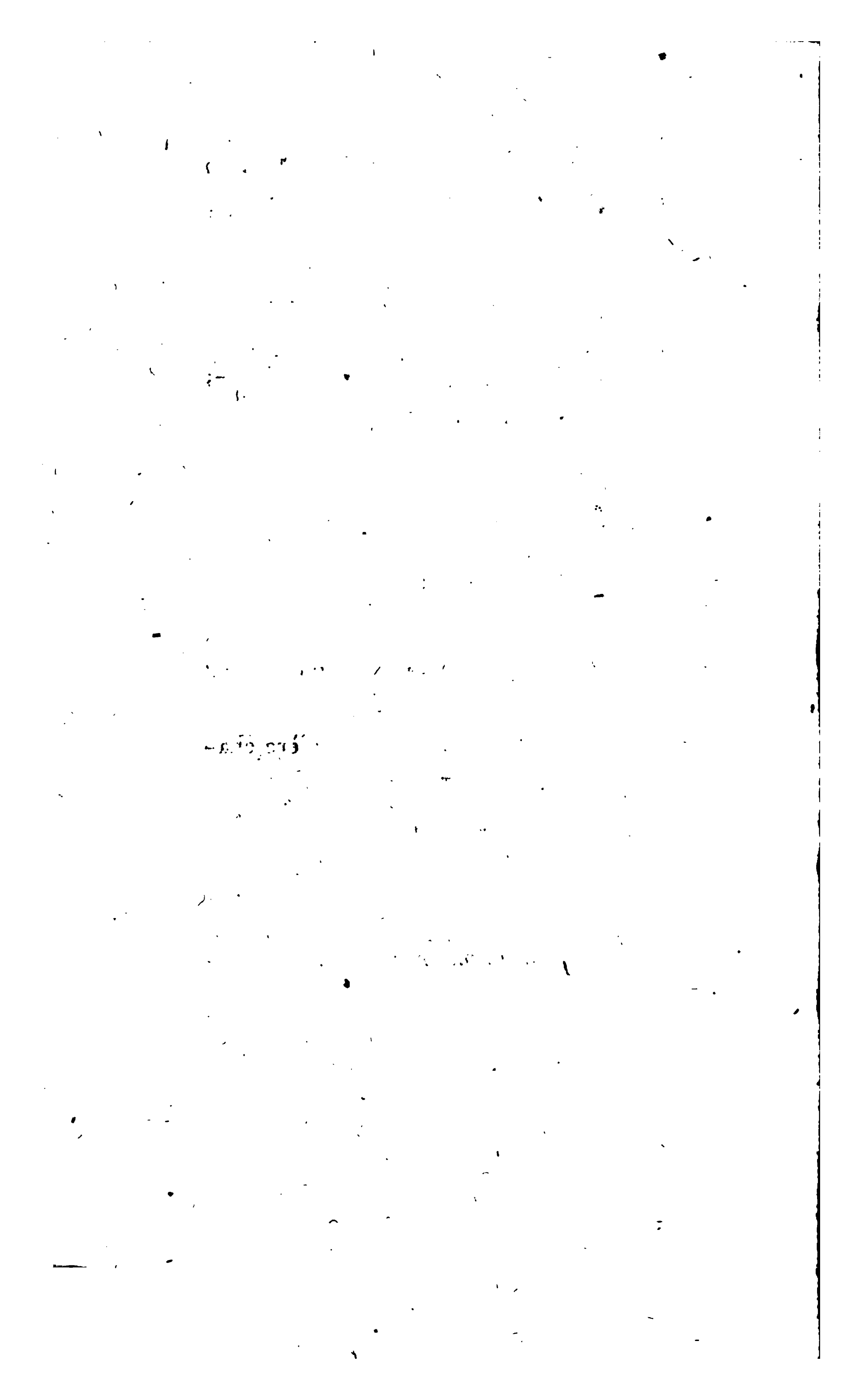


TABLE
DES MATIÈRES CONTENUES
DANS CE VOLUME.